

第1回レポート課題

【1】 非零列ベクトル $a \in \mathbb{R}^n$ とするとき, $\dim\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = 0\}$ を求めよ.

(※以降の問題ではベクトルは列ベクトル表現とする)

【2】 非零ベクトルを $a, b \in \mathbb{R}^n$ とするとき, $\dim\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b^T x = 0\}$ を求めよ.

【3】 線形独立な2ベクトル $\{a, b \in \mathbb{R}^2\}$ を用いて, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ を $x = \alpha a + \beta b$ で表現する.

(a) 逆行列により α と β を求めよ. このとき, 線形独立という仮定をどこで用いたのか答えよ.

(b) 内積を用いて連立方程式をたて α と β を求めよ. このとき, 線形独立という仮定をどこで用いたのか述べよ.

【4】 色のデータ集合 $\{x_i = (r_i, g_i, b_i) : i=1, \dots, D\}$ をある正則な線形写像 f で変換したデータ $\{fx_i : i=1, \dots, D\}$ にメディアアンカットを適用してクラスタリングを行うと, より誤差の少ない分割結果が得られたとする. このとき, f が満たす2つの性質について考察せよ.

第2回レポート課題

【1】 $n \times n$ 正方行列 A と B が, $AB = 0$ を満足するとき, $\text{rank} A + \text{rank} B$ の値域を核と像の関係を用いて求めよ. 尚, 行列 X を作用素とする線形写像は f_X と表記せよ.

【2】 線形写像 $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto [u_1 | u_2 | \dots | u_k | 0 | \dots | 0]^T x \in \mathbb{R}^n$ について次の設問に答えよ. 尚, $0 < k < n$ とする.

(a) $\{u_i \in \mathbb{R}^n : i=1, \dots, k\}$ が正規直交基底であるとき, 核の基底を求めよ.

(b) $\{u_i \in \mathbb{R}^n : i=1, \dots, k\}$ が非直交基底であるとき, 核の基底を求めよ.

【3】 $\{u, v, w \in \mathbb{R}^3\}$ を非直交基底とする. 3×3 正方行列 A を作用素とする線形写像 f_A の像が $\langle u, v \rangle$ であり, 核が $\langle w \rangle$ であるとき, 必要最小限の定数を用いて A を表現せよ.

【4】 $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ と $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ が $fa=u, fb=v, fc=w$ を満たすとき次の設問に答えよ.

(a) f が3次元線形写像 $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^3$ を定めるための条件を求め, 線形作用素 A を求めよ.

(b) (a)の場合, $\text{rank } f$ を求めよ.

第3回レポート課題

- 【1】 $n \times n$ 正方行列 A が固有値 α と固有ベクトル u を持つとき、任意の正則行列 P で相似となる行列 PAP^{-1} は固有値 α を持つことを示せ。また、その固有ベクトルを求めよ。
- 【2】 $n \times n$ 正方行列 A が複素共役固有値 $\sigma \pm i\omega$ と固有ベクトル $u \pm iv$ を持つとき、 u と v は線形独立であることを標準形を用いて背理法で示せ。（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）
- 【3】 $n \times n$ 正方行列 A が複素共役固有値 $\sigma \pm i\omega$ と実固有値 λ および対応する複素固有ベクトル $u \pm iv$ と実固有ベクトル w を持つとき、 $w \notin \langle u, v \rangle$ を標準形を用いて背理法で示せ。（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）
- 【4】 $n \times n$ 正方行列 $A = \alpha_1 u_1 v_1^T + \cdots + \alpha_n u_n v_n^T$ の固有値と固有ベクトルが $\{\alpha_i \in \mathbb{R}^1 : i=1, \dots, n\}$ と $\{u_i \in \mathbb{R}^n : i=1, \dots, n\}$ であるとき、 $\{v_i \in \mathbb{R}^n : i=1, \dots, n\}$ が満たすべき条件を求めよ。

第4回レポート課題

- 【1】 $\{u_i \in \mathbb{R}^n : i=1, \dots, n\}$ が正規直交基底であるとき、 $n \times n$ 正方行列 $A = u_1 u_1^T + \cdots + u_n u_n^T$ を求めよ。
- 【2】 直交行列 Q が複素共役固有値 $\sigma \pm i\omega$ を持つとき、その大きさは $\sigma^2 + \omega^2 = 1$ となることを標準形を用いて示せ。（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）
- 【3】 任意の正方行列 A は直交行列 Q と上三角行列 R の積で表現できることを示せ。また、この知見より $\text{rank} A = \text{rank} A^T$ および $\text{rank} A = \text{rank} AA^T$ を示せ。
- 【4】 $\{u, v \in \mathbb{R}^2\}$ を正規直交基底とすると、 2×2 行列 $A = \frac{1}{\sqrt{2}}[u|u]$ と $B = \frac{1}{\sqrt{2}}[v|-v]$ は、重複直交変換の性質 $AA^T + BB^T = I$, $BA^T = AB^T = 0$ を満足することを示せ。

第5回レポート課題

- 【1】 実対称行列 A が、正定値であるならば $A = B^T B$ を満たす正則な正方行列が存在することを示せ。
- 【2】 実正方行列 A から定められる対称行列 $A + A^T$ が正定値ならば、 A の固有値の実部は、すべて正となることを標準形を用いて示せ。
- 【3】 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ の拘束条件下での $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n|$ の最大化問題をスペクトルノルムの知見を利用して解け。
- 【4】 $n \times n$ 正則行列 A による単位球面 $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T x = 1\}$ の像 $\{y = Ax \in \mathbb{R}^n : x^T x = 1\}$ は楕円曲面となることを示せ。

第 6 回レポート課題

- 【1】 $n \times n$ 正定値(対称)行列 A が固有値 $\{\lambda_i \in \mathbb{R}^n: i=1, \dots, n\}$ と固有ベクトル $\{u_i \in \mathbb{R}^n: i=1, \dots, n\}$ を持つとき, 線形方程式 $b = Ax$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) の解 x^* を固有ベクトルの線形結合で表せ.
- 【2】 $n \times n$ 正則行列 A が相異なる実固有値 $\{\lambda_i \in \mathbb{R}^n: i=1, \dots, n\}$ と固有ベクトル $\{u_i \in \mathbb{R}^n: i=1, \dots, n\}$ を持つとき, 線形方程式 $b = Ax$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) の解 x^* を固有ベクトルの線形結合で表せ.
- 【3】 線形方程式 $b = Ax$ ($x, b \in \mathbb{R}^n$) の解 x^* を漸化式で求める方法を考えてみる.
(a) x に関する線形方程式 $x = Bx + b$ の解が x^* となるように線形作用素 B を定めよ.
(b) $\|B\| < 1$ ならば漸化式 $x_{n+1} = Bx_n + b$ の極限は x^* に収束することを示せ.
- 【4】 n 次元データベクトル $\{x_i \in \mathbb{R}^n: i=1, \dots, D\}$ を包含する部分空間 X の次元 r を求めよ. また, X を張る正規直交基底 $\{e_j \in \mathbb{R}^n: j=1, \dots, r\}$ を求めよ.

第 8 回レポート課題

- 【1】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の線形作用素 A が実固有値 α と固有ベクトル u を持つとき, 直線 $\{su: s \in \mathbb{R}^1\}$ 上に初期条件 x_0 をもつ軌道 $x(x_0, t)$ は常に $\{su: s \in \mathbb{R}^1\}$ 上に存在することを示せ.
- 【2】 線形差分方程式 $x_{n+1} = Ax_n$ の線形作用素 A が実固有値 α と固有ベクトル u を持つとき, 直線 $\{su: s \in \mathbb{R}^1\}$ 上に初期条件 x_0 をもつ軌道 $x(x_0, n)$ は常に $\{su: s \in \mathbb{R}^1\}$ 上に存在することを示せ.
- 【3】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の平衡点 0 は, $x^T(A+A^T)x < 0$ ならば漸近安定となることを示せ.
- 【4】 線形差分方程式 $x_{n+1} = Ax_n$ の不動点 0 は, $\|A\| < 1$ で漸近安定となることを示せ. また, この条件は漸近安定性の十分条件である理由を述べよ.

第 9 回レポート課題

- 【1】 4 次元空間上の 3 次元超曲面 $w = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$ の点 $(x, y, z) = (a, b, c)$ における接平面を求めよ.
- 【2】 ポテンシャル $\psi \in C^2: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi(x) \in \mathbb{R}^1$ の勾配場 $F: x \in \mathbb{R}^n \mapsto -\text{grad } \psi(x) \in \mathbb{R}^n$ の任意の点 p において線形化されたベクトル場の固有値は実固有値となることを示せ.
- 【3】 ポテンシャル $\psi \in C^2: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi(x) \in \mathbb{R}^1$ に関する最急降下法 $dx/dt = -\text{grad } \psi(x)$ の軌道を $x(t)$ とするとき, $d\psi(x(t))/dt < 0$ を示せ.
- 【4】 $m \times n$ 行列 A および $b \in \mathbb{R}^m$ によるポテンシャル $\psi: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi(x) = \|Ax - b\|^2 \in \mathbb{R}^1$ の勾配ベクトル場 $F: x \in \mathbb{R}^n \mapsto -\text{grad } \psi(x) \in \mathbb{R}^n$ の平衡点 x^* が満足する方程式を導け. また, その解 x^* を求めよ.