

8 直交補空間と非正方行列

問題 8.1 3×2 非正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ による写像

$$f : x \in R^2 \mapsto Ax \in R^3, \quad g : x \in R^3 \mapsto A^T x \in R^2$$

に関して設問に答えよ。

- (1) $\text{Im} f$ および $\dim \text{Im} f$ を求めよ。
- (2) $\text{Im} g$ および $\dim \text{Im} g$ を求めよ。
- (3) $\text{Ker} f$ および $\dim \text{Ker} f$ を求めよ。
- (4) $\text{Ker} g$ および $\dim \text{Ker} g$ を求めよ。
- (5) $(\text{Im} f)^\perp = \text{ker} g$ を示せ。
- (6) $(\text{Im} g)^\perp = \text{ker} f$ を示せ。

問題 8.2 4×3 非正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ による写像

$$f : x \in R^3 \mapsto Ax \in R^4, \quad g : x \in R^4 \mapsto A^T x \in R^3$$

に関して設問に答えよ。

- (1) $\text{Im} f$ および $\dim \text{Im} f$ を求めよ。
- (2) $\text{Im} g$ および $\dim \text{Im} g$ を求めよ。
- (3) $\text{Ker} f$ および $\dim \text{Ker} f$ を求めよ。
- (4) $\text{Ker} g$ および $\dim \text{Ker} g$ を求めよ。
- (5) $(\text{Im} f)^\perp = \text{ker} g$ を示せ。
- (6) $(\text{Im} g)^\perp = \text{ker} f$ を示せ。