6　ベクトル空間と内積

問題 6.1 3 次元実空間 R^3 上の 3 ベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を直交化することで，正規直交基底系 $\{u_1, u_2, u_3\}$ を構成せよ．

問題 6.2 3 次元実空間が非直交基底系

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で張られるとき，任意のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を定める 3 成分 $\{a_1, a_2, a_3\}$ を求めよ．ただし，成分とは，x を基底系 $\{e_1, e_2, e_3\}$ の線形結合

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

で表現した場合，各々の基底ベクトルにかけられる係数を意味する．

問題 6.3 3 次元実空間における非零ベクトル $n \in R^3$ により，

$$V = \{x \in R^3 \mid n \cdot x = 0\}$$

で定められる 2 次元部分空間は，線形独立な 2 ベクトル $a, b \in R^3$ で張られるとする．このとき，n, a, b の関係を示せ．

問題 6.4 3 次元実空間における 2 つの非零ベクトル $a, b \in R^3$ により，

$$V = \{x \in R^3 \mid a \cdot x = b \cdot x = 0\}$$

で定められる部分空間の次元を求めよ．

問題 6.5 3 次元実空間における線形独立な *2* つの非零ベクトルを $a, b \in R^3$ とし，a, b と直交する非零ベクトルを $c \in R^3$ とする．このとき，線形写像

$$f \ : \ x \in R^3 \mapsto (aa^T + bb^T)x \in R^3$$

の像および核を求めよ．($a^T a$ は内積であるが，　aa^T は，3×3 行列となることに気をつけよ）