

3 線形写像と核と像

問題 3.1 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ に関する次の設問に答えよ.

- (1) 2次元線形写像 $f : x \in R^2 \mapsto Ax \in R^2$ の像

$$\text{Im}f = \{fx \mid x \in R^2\}$$

および核

$$\text{Ker}f = \{x \in R^2 \mid fx = 0\}$$

を求め, 図示せよ.

- (2) $\text{rank } f$ および $\text{null } f$ を求めよ

- (3) 上記の核の基底ベクトルと像の基底ベクトルをあわせたベクトル集合は R^2 を張れるか答えよ.

問題 3.2 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する次の設問に答えよ.

- (1) 3次元線形写像 $f : x \in R^3 \mapsto Ax \in R^3$ の像

$$\text{Im}f = \{fx \mid x \in R^3\}$$

および核

$$\text{Ker}f = \{x \in R^3 \mid fx = 0\}$$

を求めよ.

- (2) $\text{rank } f$ および $\text{null } f$ を求めよ.

- (3) 上記の核の基底ベクトルと像の基底ベクトルをあわせたベクトル集合は R^3 を張れるか答えよ.

問題 3.3 3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に関する次の設問に答えよ.

- (1) 3次元線形写像 $f : x \in R^3 \mapsto Ax \in R^3$ の像

$$\text{Im}f = \{fx \mid x \in R^3\}$$

および核

$$\text{Ker}f = \{x \in R^3 \mid fx = 0\}$$

を求めよ.

- (2) $\text{rank } f$ および $\text{null } f$ を求めよ.

- (3) 上記の核の基底ベクトルと像の基底ベクトルをあわせたベクトル集合は R^3 を張れるか答えよ.