

2 線形独立性と次元

問題 2.1 R^3 の 4 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問に答えよ．

- (1) $\dim \langle v_1, v_2 \rangle$ を求めよ．また， $\langle v_1, v_2 \rangle$ を張る基底を一組求めよ．
- (2) $\dim \langle v_1, v_3 \rangle$ を求めよ．また， $\langle v_1, v_3 \rangle$ を張る基底を一組求めよ．
- (3) $\dim \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ を求めよ．また， $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ を張る基底を一組求めよ．
- (4) $\text{rank} [v_1|v_2|v_3|v_4]$ を求めよ．また， $\dim \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ との関係について述べよ．

問題 2.2 R^3 の 3 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix},$$

とする． $\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 3$ となる $a \in R^1$ を求めよ．また， $\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ を求めよ

問題 2.3 R^3 の 4 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とする． $\dim \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = 3$ となるための $a, b, c \in R^1$ に関する条件を述べよ．また，その条件下で基底を一組求めよ．

問題 2.4 R^3 の 4 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，部分空間 $W = \langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_3, v_4 \rangle$ を求めよ．また，その次元および基底を一組答えよ．