8　直交補空間と非正方行列

定義 8.1 実ベクトル空間 V の部分空間 U に対して，部分空間

$$U^{\perp} = \{\mathrm{x} \in V \mid \mathrm{x} \cdot \mathrm{u} = 0 \text{ for all } \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}$$

を直交補空間という.

命題 8.1 $U =< \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m > \subset \mathrm{R}^n$ ならば,

$$U^{\perp} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid [\mathrm{u}_1|\mathrm{u}_2|\ldots|\mathrm{u}_m]^T\mathrm{x} = 0\}.$$

証明　仮に，全ての $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で，$\mathrm{u}_i \perp \mathrm{x}$ ならば，$\sum_{i=1}^{m} a_i\mathrm{u}_i \cdot \mathrm{x} = 0$ である.
逆に，全ての $\{a_i \in \mathrm{R}^1\}_{i=1}^{m}$ で $\sum_{i=1}^{m} a_i\mathrm{u}_i \cdot \mathrm{x} = 0$ であるならば,

$$a_i = 1, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_{i-1} = a_{i+1} = \ldots = a_n = 0$$

として，$\mathrm{u}_i \perp \mathrm{x}$ for all $\mathrm{i} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$ となる．よって,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\mathrm{u}_i \cdot \mathrm{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{u}_i \perp \mathrm{x} \text{ for all } \mathrm{i} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}.$$

から,

$$[\mathrm{u}_1|\mathrm{u}_2|\ldots|\mathrm{u}_m]^T\mathrm{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{x} = \mathrm{u}_2 \cdots \mathrm{x} = \ldots = \mathrm{u}_n \cdot \mathrm{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{m} a_i\mathrm{u}_i \cdot \mathrm{x} = 0.$$

■

命題 8.2 実ベクトル空間 V の部分空間 U に対して，以下が成り立つ.

(1) $V = U \oplus U^{\perp}$.

(2) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

証明　U を張る正規直交基底を $\{\mathrm{u}_i\}_{i=1}^{\dim U}$ とし，これを含み V を張る正規直交基底を $\{\mathrm{u}_i\}_{i=1}^{\dim U} \cup \{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{\dim V - \dim U}$ とする．このとき，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{\dim V - \dim U}$ で張られる部分空間上のベクトルは,

$$\left(\sum_{i=1}^{\dim V - \dim W} a_i\mathrm{v}_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\dim W} b_i\mathrm{u}_i\right) = 0$$

を満足するため，$U^{\perp} =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{\dim V - \dim W} >$ となる.

■

定理 8.1 $m \times n$ 行列 A による線形写像

$$\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{Ax} \in \mathrm{R}^m, \quad \mathrm{g}\ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^m \mapsto \mathrm{A}^T\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$$

に関して以下が成り立つ.

(1) $\mathrm{R}^m = \mathrm{Im\ f} \oplus \mathrm{Ker\ g}, \quad (\mathrm{Im\ f})^{\perp} = \mathrm{Ker\ g}.$

(2) $\mathrm{R}^n = \mathrm{Im\ g} \oplus \mathrm{Ker\ f}, \quad (\mathrm{Im\ g})^{\perp} = \mathrm{Ker\ f}.$

(3) $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{Im\ g} \mapsto \mathrm{Im\ f}$ は同型写像.

(4) $\mathrm{g}\ :\ \mathrm{Im\ f} \mapsto \mathrm{Im\ g}$ は同型写像.

証明

(1) $\mathrm{Im\ f} = \{\mathrm{Ax} \in \mathrm{R}^m \mid \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n\}, \quad \mathrm{Ker\ g} = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^m \mid \mathrm{A}^T\mathrm{y} = 0 \in \mathrm{R}^n\}$ から，$\mathrm{Ax} \in \mathrm{Im\ f}$ および $\mathrm{y} \in \mathrm{Ker\ g}$ に対して，

$$(\mathrm{Ax}) \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x}^T\mathrm{A}^T\mathrm{y} = \ | \ \Rightarrow\ \mathrm{Ax} \perp \mathrm{y}$$

逆に，$\mathrm{y} \in (\mathrm{Im\ f})^{\perp}$ であるならば,

$$(\mathrm{Ax}) \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x}^T\mathrm{A}^T\mathrm{y} = 0\ \Rightarrow\ \mathrm{y} \in \mathrm{Ker\ g}$$

から，$(\mathrm{Im\ f})^{\perp} = \mathrm{Ker\ g}$．また，定理 8.2 より，$\mathrm{R}^m = \mathrm{Im\ f} \oplus \mathrm{Ker\ g}.$

(3) $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^m$ に関して，(1) および (2) から,

$$\mathrm{f}\ :\ \mathrm{Ker\ f} \in \mathrm{R}^n \mapsto \{0\} \in \mathrm{R}^m, \quad \mathrm{f}\ :\ \mathrm{Im\ g} \mapsto \mathrm{Im\ f}.$$

また,

$$\dim \mathrm{Im\ f} = \{\mathrm{Ax} \in \mathrm{R}^m \mid \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n\} = \mathrm{rank\ A}, \quad \dim \mathrm{Im\ g} = \{\mathrm{A}^T\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{x} \in \mathrm{R}^m\} = \mathrm{rank\ A}^T$$

より，$\dim \mathrm{Im\ f} = \dim \mathrm{Im\ g}$.

■

例 8.1

$$\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} \in \mathrm{R}^3, \quad \mathrm{g}\ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} \in R^2$$

において,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im\ f} &= \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 \mid s, t \in \mathrm{R}^1\} = \{s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 \mid s, t \in \mathrm{R}^1\}, \\ \mathrm{Ker\ f} &= \{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}. \end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im\ g} &= =\{s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^2 \mid s,t\in \mathrm{R}^1\},\\ \mathrm{Ker\ g} &= \{c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^3 \mid c\in \mathrm{R}^1\}.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^3 &= \mathrm{Im\ f}\oplus\mathrm{Ker\ g} =<\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}>\oplus<\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}>,\\ \mathrm{R}^2 &= \mathrm{Im\ g}\oplus\mathrm{Ker\ f} =<\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}>\oplus<\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}>.\end{aligned}$$

今回のポイント 8.1 そもそも，同一な空間 V に作用する線形写像 $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x}\in V\mapsto \mathrm{Ax}\in V$ に関して，像 Ker f と核 Im f を各々定義するとき，次元公式

$$\dim V = \mathrm{rank\ f}+\mathrm{null\ f} = \dim \mathrm{Ker\ f}+\dim \mathrm{Im\ f}$$

が成立するにも関わらず，

$$\emptyset \neq \mathrm{Ker\ f}\cap \mathrm{Im\ f}$$

から，$V\neq \mathrm{Ker\ f}+\mathrm{Im\ f}$ となる．今回，任意の正方行列 A に関して，線形写像 $\mathrm{g}\ :\ \mathrm{x}\in V\mapsto \mathrm{A}^T\mathrm{x}\in V$ を導入して，

$$V = \mathrm{Ker\ g}+\mathrm{Im\ f} = (\mathrm{Im\ f})^{\perp}+\mathrm{Im\ f}$$

としたわけである．
ところが，A が対角化可能ならば，話は非常に単純であり，

$$V = \mathrm{Ker\ f}\oplus\mathrm{Im\ f}$$

が成り立つ．ここで，核はすべての零固有値の固有ベクトルで，像はすべての非零固有値の固有ベクトルで張られることは自明である．すなわち，対角化不可能な行列では，核と像の各々の基底が線形従属となる場合があって，問題が複雑になるのである．この問題に関して，対角化は**ジョルダン分解**として一般化される．
行列 A が対称行列であり，**スペクトル分解可能**な場合，話はさらに単純となり，$\mathrm{f}=\mathrm{g}$ から，

$$V = \mathrm{Ker\ f}\oplus\mathrm{Im\ f} = (\mathrm{Im\ f})^{\perp}\oplus\mathrm{Im\ f}$$

まで成立することになる．
