7　直交行列と実対称行列

定義 7.1 $\mathrm{Q}^T\mathrm{Q} = \mathrm{I}$ を満足する n 次実正方行列を直交行列という．

定理 7.1 直交行列 Q において，以下は同値である．

(1) $\parallel \mathrm{Q}x \parallel = \parallel x \parallel$ for all $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.

(2) $(\mathrm{Qx}) \cdot (\mathrm{Qy}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ for all $\mathrm{x},\ \mathrm{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.

(3) $\mathrm{Q}^T\mathrm{Q} = \mathrm{I}$

証明

(1) ⇒ (2) x を新たに $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ と置き換えたとき，左辺は

$$\parallel \mathrm{Q}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \parallel^2 = \mathrm{x}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Qx} + 2\mathrm{y}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Qx} + \mathrm{y}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Qy} = \parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2 + 2\mathrm{y}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Qx}.$$

他方，右辺は

$$\parallel \mathrm{x}+\mathrm{y} \parallel^2 = \parallel \mathrm{x} \parallel^2 + \parallel \mathrm{y} \parallel^2 + 2y^T x.$$

よって，

$$\mathrm{y}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}x = (\mathrm{Qy}) \cdot (\mathrm{Qx}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}.$$

(2) ⇒ (3) $\mathrm{Q} = [\mathrm{q}_1|\mathrm{q}_2|\ldots|\mathrm{q}_n]$ および $\mathrm{x} = \mathrm{e}_i,\ \mathrm{y} = \mathrm{e}_j$ とすると，

$$\mathrm{e}_i^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}e_j = \mathrm{q}_i^T\mathrm{q}_j = \mathrm{e}_i^T\mathrm{e}_j = \delta_{i,j}.$$

よって，$\mathrm{Q}^T\mathrm{Q} = \mathrm{I}$.

(3) ⇒ (1)

$$\parallel \mathrm{Qx} \parallel^2 = \mathrm{x}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Qx} = \mathrm{x}^T\mathrm{x} = \parallel \mathrm{x} \parallel^2 .$$

■

定理 7.2 直交行列 Q は，以下を満足する．

(1) 固有値の大きさは 1.

(2) 行列式の大きさは 1.

証明

(1) Q の固有値および固有ベクトルを $\sigma \pm i\omega$ および $\mathrm{u} \pm i\mathrm{v}$ とする．但し，$\sigma, \omega \in \mathrm{R}^1$ および $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{R}^n$ とする．この時,

$$\mathrm{Q}(\mathrm{u} \pm i\mathrm{v}) = (\sigma \pm i\omega)(\mathrm{u} \pm i\mathrm{v})$$

より, 実数部と虚部に分解し,

$$\mathrm{Qu} = \sigma\mathrm{u} - \omega\mathrm{v}, \quad \mathrm{Qv} = \omega\mathrm{u} + \sigma\mathrm{v}$$

をえる．ここで,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Qu})^T\mathrm{Qu} &= \| \mathrm{u} \|^2 = \sigma^2 \| \mathrm{u} \|^2 - 2\sigma\omega\mathrm{u}^T v + \omega^2 \| \mathrm{v} \|^2, \\ (\mathrm{Qv})^T\mathrm{Qv} &= \| \mathrm{v} \|^2 = \sigma^2 \| \mathrm{v} \|^2 + 2\sigma\omega\mathrm{u}^T\mathrm{v} + \omega^2 \| \mathrm{u} \|^2 \end{aligned}$$

から，辺々を加算して，

$$\| \mathrm{u} \|^2 + \| \mathrm{v} \|^2 = (\| \mathrm{u} \|^2 + \| \mathrm{v} \|^2)(\omega^2 + \sigma^2).$$

したがって，$\omega^2 + \sigma^2 = 1$ である．

(2) $|\det \mathrm{Q}^T\mathrm{Q}| = |\det \mathrm{Q}^T||\det \mathrm{Q}| = |\det \mathrm{Q}|^2 = 1 = |\det \mathrm{I}|$.

■

定義 7.2 対角成分から左下の成分がすべて零の行列を上三角行列という.

定理 7.3 実固有値のみを持つ $n \times n$ 実正方行列 A は，適当な直交行列 Q によって，R と線形共役となる.

証明 1×1 行列の場合，自明である.
$n-1 \times n-1$ 行列のとき，$\mathrm{A}_{n-1} = \mathrm{Q}_{n-1}^T\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ であることを仮定して，$n \times n$ 行列の場合を示す.
まず，A からある固有値 $\lambda \in \mathrm{R}^1$ と正規化された固有ベクトル $\mathrm{q}_1 \in \mathrm{R}^n$ を選択し，グラム・シュミット直交化によって適当な基底 $\{\mathrm{q}_i\}_{i=1}^n$ を構成する．これによって,

$$\mathrm{A}[\mathrm{q}_1|\mathrm{q}_2|\ldots|\mathrm{q}_n] = [\lambda\mathrm{q}_1|\mathrm{Aq}_2|\ldots|\mathrm{Aq}_n]$$

となり，その左辺は,

$$\begin{aligned} [\lambda\mathrm{q}_1|\mathrm{Aq}_2|\ldots|\mathrm{Aq}_n] &= \mathrm{I}[\lambda\mathrm{q}_1|\mathrm{Aq}_2|\ldots|\mathrm{Aq}_n] \\ &= [\mathrm{q}_1|\mathrm{q}_2|\ldots|\mathrm{q}_n]\left[\begin{array}{c} \mathrm{q}_1^T \\ \hline \mathrm{q}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{q}_n^T \end{array}\right][\lambda\mathrm{q}_1|\mathrm{Aq}_2|\ldots|\mathrm{Aq}_n] \\ &= [\mathrm{q}_1|\mathrm{q}_2|\ldots|\mathrm{q}_n]\left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}_{n-1} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

したがって，$Q^T = [q_1|q_2|\dots|q_n]$ として，

$$AQ^T = Q^T \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right].$$

さらに，

$$\begin{aligned}
AQ^T \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right] &= Q^T \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T R_{n-1} Q_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right] \\
&= Q^T \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T R_{n-1} \end{array}\right] \\
&= Q^T \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T R_{n-1} \end{array}\right] \\
&= Q^T \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

と変形し，

$$Q_n^T = Q^T \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_{n-1}^T \end{array}\right]$$

と置き換えると，

$$AQ_n^T = Q_n \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right] = Q_n^T R_n.$$

■

定義 7.3 $A = A^T$ を満たす実正方行列を実対称行列という．

定理 7.4 実対称行列の固有値はすべて実数であり，相異なる固有値の固有ベクトルは直交する．

証明　A の固有値および固有ベクトルを $\sigma \pm i\omega$ および $u \pm iv$ とする．但し，$\sigma, \omega \in R^1$ および $u, v \in R^n$ とする．この時,

$$A(u \pm iv) = (\sigma \pm i\omega)(u \pm iv)$$

より, 実数部と虚部に分解し,

$$Au = \sigma u - \omega v, \quad Av = \omega u + \sigma v$$

をえる．2 式それぞれに v および u との内積を計算すると,

$$v^T Au = \sigma v^T u - \omega \parallel v \parallel^2, \quad u^T Av = \omega \parallel u \parallel^2 + \sigma u^T v.$$

他方, $(v^T Au)^T = u^T A^T v = u^T Av$ より，

$$\sigma u^T v - \omega \parallel v \parallel^2 = \omega \parallel u \parallel^2 + \sigma u^T v.$$

したがって,

$$\omega(\parallel v \parallel^2 + \parallel u \parallel^2) = 0$$

から，$\omega = 0$.
また，$\alpha \neq \beta$ のとき，

$$\mathrm{Av} = \alpha \mathrm{v}, \quad \mathrm{Au} = \beta \mathrm{u}$$

とすると，

$$\alpha \mathrm{u}^T \mathrm{v} = \mathrm{u}^T \mathrm{A} \mathrm{v} = \mathrm{u}^T \mathrm{A}^T \mathrm{v} = (\mathrm{Au})^T \mathrm{v} = \beta \mathrm{u}^T \mathrm{v}$$

から，$(\alpha - \beta)\mathrm{u}^T \mathrm{v} = 0$ から $\mathrm{u} \perp \mathrm{v}$.

■

定理 7.5 実対称行列 A は，直交行列 Q により対角化可能である.

証明 定理 7.4 より，実対称行列は実固有値のみを持つ．よって，定理 7.3 より，A は

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}^T \mathrm{R} \mathrm{Q}$$

に分解されるが，$\mathrm{A} = \mathrm{Q}^T \mathrm{R} \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^T \mathrm{R}^T \mathrm{Q} = \mathrm{A}$ から $\mathrm{R} = \mathrm{R}^T$.

■

例 7.1

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

特性方程式 $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ から，

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2 つの固有ベクトルを正規化すると，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

これを行列で表現して，

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

よって，変換行列

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

は直交行列となる.

定義 7.4 $n \times n$ 対称行列 A の実固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ とし，正規直交固有ベクトルを $\{\mathrm{q}_i\}_{i=1}^n$ とするとき，

$$\mathrm{A} = \lambda_1 \mathrm{q}_1 \mathrm{q}_1^T + \lambda_2 \mathrm{q}_2 \mathrm{q}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathrm{q}_n \mathrm{q}_n^T$$

を対称行列の**スペクトル分解**という.