5　固有値と固有ベクトル

復習と確認 5.1 $\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\}$ の意味は，$\boxed{}$である．

復習と確認 5.2 $\dim\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\} = \boxed{}$.

復習と確認 5.3 実係数 n 次方程式が複素解 $\sigma + i\omega$ を持つ場合，$\boxed{(a)}$ も解となる．両者の関係を$\boxed{(b)}$ という．

復習と確認 5.4 実係数 2 次方程式の解を分類せよ．

復習と確認 5.5 実係数 3 次方程式の解を分類せよ．

定義 5.1 n 次正方行列 A において，

$$\mathrm{Av} = \lambda \mathrm{v}, \quad \lambda \in \mathrm{C}^1$$

を満足する非零複素ベクトル v が存在するとき，λ を固有値といい，v を固有ベクトルという．

定理 5.1 固有多項式 $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$ の解は固有値である．

証明　$(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{v} = 0$ の非自明解の存在条件は，$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$ となることである．

■

定理 5.2 相異なる固有値の固有ベクトルは，線形独立である．

証明　固有ベクトルを $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ とし，帰納的に証明する．まず，

$$a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 = 0 \quad (*)$$

とおくと，

$$a_1\mathrm{Av}_1 + a_2\mathrm{Av}_2 = a_1\lambda_1\mathrm{v}_1 + a_2\lambda_2\mathrm{v}_2 = 0.$$

$(*)$ に λ_1 および λ_2 をかけて差をとると，

$$a_1(\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{v}_1 = a_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{v}_2 = 0.$$

よって，$a_1 \mathrm{v}_1 + a_2 \mathrm{v}_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$．次に，

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

を仮定する．

$$a_1 \mathrm{v}_1 + a_2 \mathrm{v}_2 + \ldots + a_k \mathrm{v}_k + a_{k+1} \mathrm{v}_{k+1} = 0 \quad (**)$$

とおくと，

$$a_1 \lambda_1 \mathrm{v}_1 + a_2 \lambda_2 \mathrm{v}_2 + \ldots + a_k \lambda_k \mathrm{v}_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} \mathrm{v}_{k+1} = 0$$

が成立ち，$(**)$ に λ_{k+1} をかけて差を取ると，

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathrm{v}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathrm{v}_2 + \ldots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathrm{v}_k = 0.$$

仮定より，$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k\}$ は線形独立なため，

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0.$$

これを $(**)$ に代入すると，

$$a_{k+1} \lambda_{k+1} \mathrm{v}_{k+1} = 0$$

より，$a_{k+1} = 0$．

■

定義 5.2 n 次正方行列 A および B に対して，正則な行列 P が存在し

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$$

を満足するとき，行列 A と B は相似であるといい，P を変換行列という．

定理 5.3 線形共役な正方行列は，同じ固有多項式を持つ．

証明　$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ から，A の固有多項式に代入すると

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) &= \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} - \lambda\mathrm{I}) = \det(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I})\mathrm{P}) \\ &= \det\mathrm{P}^{-1}\det(\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I})\det\mathrm{P} = \det(\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I})\det\mathrm{P}.\end{aligned}$$

■

定義 5.3 n 次正方行列 A に対して，線形共役な対角行列 $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ が存在し，

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathrm{P}$$

を満足するとき，行列 A は対角化可能であるという．

定理 5.4 $n \times n$ 実正方行列 A が実数の固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ を持ち，その固有ベクトルが R^n の基底となるならば，

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathrm{P}$$

を満足する正則な実正方行列 P が存在し，対角化可能[1] である．

証明　実固有値 λ_i に対する実固有ベクトルを v_i とし，

$$\mathrm{Av}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

を行列で表現すると，

$$\mathrm{A}[\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n] = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]\mathrm{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

また，行列 $[\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$ は正則であるため，

$$\mathrm{P} = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]^{-1}, \quad \mathrm{P}^{-1} = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$$

として与式を得る．

■

定義 5.4 正方行列 A に関する部分空間

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\mathrm{x} \in C^n \mid \mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x}\} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{C}^n \mid (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{x}\}$$

を固有値 λ の固有空間という．

定理 5.5 $n \times n$ 正方行列 A の相異なる固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ とし，各々の重複度を $\{n_i\}_{i=1}^m$ とするとき，以下は同値である．

(1) A は，対角化可能．

(2) $\mathrm{C}^n = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{E}_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_m}$

(3) $\dim \mathrm{E}_{\lambda_i} = n_i$ for all i $\in \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$

定理 5.6 A が対角化可能である．$\Leftrightarrow$ $n_i = \mathrm{null}\ (\lambda_i \mathrm{I} - \mathrm{A})$ である．

定理 5.7 $\det \mathrm{A} = \Pi_{i=1}^n \lambda_i$.

---

[1] 複素固有値の場合，複素行列の範囲であれば，同様に対角化可能であるるが，実行列の範囲では帯行列になることに注意する．

証明　定理 5.5(3) から，対角化可能 $\Leftrightarrow \dim V_{\lambda_i} = \mathrm{null}\ (\lambda_i I - A) = n_i$ であり，

$$\sum_{i=1}^{m} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} n_i = n$$

から自明.

■

例 5.1 対角化可能性に関して幾つかの例を挙げる.

(1) 相異なる実固有値の場合（実行列として対角化可能）：

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

特性方程式 $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ から，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

これを行列で表現して，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 相異なる複素固有値の場合（複素行列として対角化可能）：

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特性方程式 $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$ から，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \pm i)\begin{pmatrix} 1 \pm i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

これを行列で表現して，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

他方，実数の範囲で線形共役な行列を求める場合，$(*)$ を虚部と実部に分離して，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これを行列で表現して，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，帯行列へ変形される.

(3) 重根が存在するが，対角化可能な場合：

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特性方程式 $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$.

– $\lambda = 2$：単根より固有ベクトルが求まる．

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– $\lambda = -1$：2 重根のため，退化次数を確認する．

$$\mathrm{null}\ (\mathrm{A}+\mathrm{I}) = \mathrm{null}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

から，

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{v} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

なる 2 次元の固有ベクトルが求まる．

よって，

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) 重根が存在して対角化不可能な場合：

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

特性方程式 $(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}) = -(\lambda-1)^3 = 0$ から，固有値は 3 重根となる．
退化次数を確認する．

$$\mathrm{null}\ (\mathrm{A}+\mathrm{I}) = \mathrm{null}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = 1 < 3$$

から，求められる固有ベクトルは，

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-3y+z \\ x+3y-z \\ x+5y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

のみとなり対角化不可能である．

今回のポイント 5.1 線形写像 $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x} \in V \mapsto \mathrm{Ax} \in V$ および $\mathrm{g}\ :\ \mathrm{y} \in W \mapsto \mathrm{By} \in W$ に関して，同型写像 $\mathrm{h}\ :\ x \in V \mapsto \mathrm{Py} \in W$ が存在し，

$$\mathrm{hfx} = \mathrm{ghx} \text{ for all } \mathrm{x} \in \mathrm{V}$$

が成立するとき，写像 h と g は**線形共役**であるという．また，このとき，$\mathrm{PA} = \mathrm{BP}$ から，行列 A と B は**相似**となる．

今回のポイント 5.2 対角化とは，線形写像 $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x} \in V \mapsto \mathrm{Ax} \in V$ の V 上の挙動をある同型写像 $\mathrm{h}\ :\ x \in V \mapsto \mathrm{Py} \in W$ を通じて別な空間 W 上で観測した場合，$\mathrm{g} = \mathrm{hfh}^{-1}\ :\ \mathrm{y} \in W \mapsto \mathrm{By} \in W$ の線形作用素 B が対角行列となるような，同型写像 h と行列 P を定める処理である．

今回のポイント 5.3 V 上の固有ベクトル $\{\mathrm{u}_i \in V\ :\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ を W 上の標準基 $\{\mathrm{e}_i \in W\ :\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ に写す写像 $\mathrm{h}\ :\ \mathrm{u}_i \in V \mapsto \mathrm{e}_i \in W$ は，

$$\mathrm{h}\ :\ \mathrm{u}_i \in V \mapsto \mathrm{e}_i = [\mathrm{u}_1|\mathrm{u}_2|\ldots|\mathrm{u}_n]^{-1}\mathrm{u}_i \in W$$

から，線形作用素は変換行列 $\mathrm{P} = [\mathrm{u}_1|\mathrm{u}_2|\ldots|\mathrm{u}_n]^{-1}$ となる．