

4 部分空間の和と直和

復習と確認 4.1 $f : x \in R^n \mapsto Ax = [v_1 | v_2 | \dots | v_n] \in R^n$ とするとき ,

- $\text{Im } f = \boxed{(a)} = \boxed{(b)} = \boxed{(c)} = \boxed{(d)}$
- $\dim \text{Im } f = \boxed{(e)} = \boxed{(f)}$
- $\text{Ker } f = \boxed{(g)}$
- $\dim \text{Ker } f = \boxed{(h)} = \boxed{(i)}$

復習と確認 4.2 $v \neq 0$ ならば ,

$$\dim\{x \in R^n \mid v^T x = 0\} = \dim\{x \in R^n \mid \boxed{(a)} x = 0\} = \boxed{(b)} = \boxed{(v)}$$

定義 4.1 $\{W_i\}_{i=1}^n$ をベクトル空間 V の部分空間とするととき ,

$$\sum_{i=1}^n W_i = \left\{ \sum_{i=1}^n w_i \mid w_i \in W_i \right\}$$

を部分空間の和という .

補題 4.1 W_1 および W_2 を V の部分空間とすると ,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

証明 $\dim(W_1 \cap W_2) = m$ として , これを張る基底を $\{w_i\}_{i=1}^m$ とする . 他方 , W_1 および W_2 の基底をそれぞれ $\{w_i\}_{i=1}^m \cup \{v_i\}_{i=1}^{m_1}$ と $\{w_i\}_{i=1}^m \cup \{u_i\}_{i=1}^{m_2}$ とする .

$$\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=1}^{m_1} b_i v_i + \sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i = 0 \quad (*)$$

とすると ,

$$\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=1}^{m_1} b_i v_i = - \sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i.$$

となり , $\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=1}^{m_1} b_i v_i \in W_1$ から , $-\sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i \in W_1$ となる . ところが , $-\sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i \in W_2$ から , $-\sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i \in W_1 \cap W_2$ でなければならない . 他方 , $x \in W_1 \cap W_2$ は , $x = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ に限られるため ,

$$\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=1}^{m_2} c_i u_i = 0$$

となる． $\{w_i\}_{i=1}^m \cup \{u_i\}_{i=1}^{m_2}$ は線形独立であり，

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = c_1 = c_2 = \dots = c_{m_2} = 0.$$

これを (*) に代入すると $\{v_i\}_{i=1}^{m_1}$ の線形独立性から，

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{m_1} = 0.$$

よって， $\{w_i\}_{i=1}^m \cup \{v_i\}_{i=1}^{m_1} \cup \{u_i\}_{i=1}^{m_2}$ は線形独立となり，

$$\dim(W_1 + W_2) = m + m_1 + m_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

■

定理 4.1 $\{W_i\}_{i=1}^n$ を V の部分空間とすると，

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n W_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim W_i - \sum_{i=1}^{n-1} \dim\left(\sum_{j=1}^i W_j \cap W_{i+1}\right).$$

証明 補題 4.1 より，

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

ここで， W_1 および W_2 を $W_1 + W_2$ および W_3 と置き換えることで，

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &= \dim(W_1 + W_2) + \dim W_3 - \dim((W_1 + W_2) \cap W_3) \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim((W_1 + W_2) \cap W_3) \end{aligned}$$

を得る．以下，帰納的に与式が導出される．

■

定義 4.2 ベクトル空間 V の部分空間 $\{W_i\}_{i=1}^n$ が，

- $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0$.
- $V = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

を満足するとき， $W_1 + W_2 + \dots + W_n$ を V の直和といい， $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ と表す．

命題 4.1 V の部分空間 $\{W_i\}_{i=1}^n$ に関して，以下は同値である．

- (1) $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0$.
- (2) $W_1 + W_2 + \dots + W_i$ の基底は， $\{W_i\}_{i=1}^n$ の基底の合併である．
- (3) $\dim(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_n$.
- (4) $(W_1 + W_2 + \dots + W_i) \cap W_{i+1} = \{0\}$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

証明

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す .

W_i の基底を $\{w_j(i)\}_{j=1}^{m_i}$ とするとき , 任意の $\{a_j(i) \in \mathbb{R}^1\}_{j=1}^{m_i}$ に対して ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_1} a_j(1)w_j(1) + \sum_{j=1}^{m_2} a_j(2)w_j(2) + \dots + \sum_{j=1}^{m_n} a_j(n)w_j(n) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{m_i} a_j(i)w_j(i) &= 0 \text{ for all } i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

が成立する . 各基底の線形独立性より ,

$$a_1(i) = a_2(i) = \dots = a_{m_i}(i) = 0 \text{ for all } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

のため ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_1} a_j(1)w_j(1) + \sum_{j=1}^{m_2} a_j(2)w_j(2) + \dots + \sum_{j=1}^{m_n} a_j(n)w_j(n) &= 0 \\ \Rightarrow a_1(i) = a_2(i) = \dots = a_{m_i}(i) &= 0 \text{ for all } i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

から基底の合併も線形独立となる . また , 基底の合併が $\sum_{i=1}^n W_i$ を張ることは自明なため , 基底の合併は基底となる .

(2) $\Rightarrow$ (3) を示す .

$\dim W_i = m_i$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ および $\dim(\sum_{i=1}^n W_i) = \sum_{i=1}^n m_i$ から ,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n W_i\right) = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \dim W_i.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) を示す .

定理 4.1 より , $\dim(\sum_{i=1}^n W_i) = \sum_{i=1}^n \dim W_i$ ならば ,

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim((W_1 + W_2) \cap W_3) = \dots = \dim((W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1}) \cap W_n) = 0.$$

よって ,

$$W_1 \cap W_2 = (W_1 + W_2) \cap W_3 = \dots = (W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1}) \cap W_n = \{0\}.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) を示す .

$$W(k) = \sum_{i=1}^k W_i, \quad v(k) = \sum_{i=1}^k v_i$$

とする . $W(n-1) \cap W_n = \{0\}$ から , $v(n-1) \in W(n-1)$ および $v_n \in W_n$ が ,

$$v(n-1) + v_n = 0$$

を満足すると $v_n \in W(n-1)$ となり矛盾 . よって , $v(n-1) = v_n = 0$. 同様に , $W(n-2) \cap W_{n-1} = \{0\}$ から , $v(n-2) \in W(n-2)$ および $v_{n-1} \in W_{n-1}$ が ,

$$v(n-2) + v_{n-1} = 0$$

を満足すると $v_{n-1} \in W(n-2)$ となり矛盾 . よって , $v(n-2) = v_{n-1} = 0$. これを帰納的に反復し ,

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$$

.

■