3 線形写像と核と像

復習と確認 3.1 $\{\mathrm{v}_i \in \mathrm{R}^n\}_{i=1}^n$，$V =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ および $\mathrm{A} = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$ とするとき，

- $\dim V =$ $\boxed{(a)}$
- $\dim\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\} =$ $\boxed{(b)}$ $=$ $\boxed{(c)}$
- $\boxed{(d)}$ ならば，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ は，V の $\boxed{(e)}$ であり，$\boxed{(f)}$ $\neq 0$

復習と確認 3.2 集合 X の任意の元 x に対して集合 Y のある元 y が対応するとき，その対応関係 f を写像といい，$\mathrm{f} \ : \ X \to Y$ あるいは $\mathrm{f} \ : \ \mathrm{x} \in X \mapsto \mathrm{y} \in Y$ で表記する．

- 写像 $\mathrm{f} \ : \ \mathrm{x} \in X \mapsto \mathrm{y} \in Y$ が $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}' \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) \neq \mathrm{f}(\mathrm{x}')$ を満たすとき，これを単射という．
- 写像 $\mathrm{f} \ : \ \mathrm{x} \in X \mapsto \mathrm{y} \in Y$ が $\{\mathrm{f}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in X\} = Y$ を満たすとき，これを全射という．
- 写像 $\mathrm{f} \ : \ \mathrm{x} \in X \mapsto \mathrm{y} \in Y$ が全単射であるとき，逆写像 $\mathrm{f}^{-1} \ : \ \mathrm{y} \in Y \mapsto \mathrm{x} \in X$ が存在する．

定義 3.1 V, W を実ベクトル空間とするとき，写像 $\mathrm{f} \ : \ V \to W$ が，線形性

$$\mathrm{f}(a\mathrm{x} + b\mathrm{y}) = a\mathrm{f}(\mathrm{x}) + b\mathrm{f}(\mathrm{y}), \quad a, b \in \mathrm{R}^1$$

を満足するとき，f を線形写像という．

定義 3.2 写像 f が，全ての $\mathrm{x} \in V$ に対して

$$\mathrm{f} \ : \ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}$$

を満足するとき，恒等写像といい，$\mathrm{id}_{\ V}$ と表記する．

定義 3.3 写像 $\mathrm{f} \ : \ V \to W$ に関する部分空間

$$\mathrm{Ker}\ \mathrm{f} = \{\mathrm{x} \in V \mid \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0\}, \quad \mathrm{Im}\ \mathrm{f} = \{\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in W \mid \mathrm{x} \in V\}$$

を核と像という．

命題 3.1 $\mathrm{f} \ : \ V \to W,\ \mathrm{g} \ : \ W \to Z$ を線形写像とする．

(1) 合成写像 $\mathrm{g} \cdot \mathrm{f} \ : \ V \to Z$ は線形写像である．

(2) f が全射かつ単射であるならば，逆写像 f^{-1} も線形写像である．

証明

(1) $\mathrm{g}\cdot\mathrm{f}(a\mathrm{x}+b\mathrm{y})=\mathrm{g}(a\mathrm{f}(\mathrm{x})+b\mathrm{f}(\mathrm{y}))=a\mathrm{g}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{x})+b\mathrm{g}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{y})$.

(2) f は全単射であり，$f\ :\ \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\mapsto\mathrm{x}$ が存在する．他方，f の線形性から，

$$\mathrm{f}(a\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})+b\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}))=a\mathrm{x}+b\mathrm{y}$$

より，これに f^{-1} を施すと，

$$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(a\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})+b\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})))=a\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})+b\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})=\mathrm{f}^{-1}(a\mathrm{x}+b\mathrm{y}).$$

■

補題 3.1 線形写像 $\mathrm{f}\ :\ V\to W$ が単射である．$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker\ f}=\{0\}$.

証明 線形写像 f は，常に原点を原点にうつすため，単射であれば，$\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ は $\mathrm{x}=0$ に限られる．他方，

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}-\mathrm{y})=f(\mathrm{x})-f(\mathrm{y})=0$$

が $\mathrm{x}-\mathrm{y}=0$ に限られるならば，$\mathrm{x}-\mathrm{y}\neq 0$ ならば，$\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{y})\neq 0$ から単射となる．

■

命題 3.2 $\mathrm{f}\ :\ V\to W$ は線形写像であり，$\{\mathrm{v}_i\in V\}_{i=1}^n$ とするとき，

(1) f が単射かつ $\{\mathrm{v}_i\in V\}_{i=1}^n$ が線形独立であるとき，$\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\in W\}_{i=1}^n$ は線形独立である．

(2) $V=<\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n>$ かつ $\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\in W\}_{i=1}^n$ が線形独立ならば，f は単射である．

(3) f が全射かつ $V=<\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n>$ ならば，$W=<\mathrm{f}(\mathrm{v}_1),\mathrm{f}(\mathrm{v}_2),\ldots,\mathrm{f}(\mathrm{v}_n)>$.

(4) $W=<\mathrm{f}(\mathrm{v}_1),\mathrm{f}(\mathrm{v}_2),\ldots,\mathrm{f}(\mathrm{v}_n)>$ ならば，f は全射.

である．

証明

(1) 補題 3.1 より，

$$\mathrm{f}(a_1\mathrm{v}_1+a_2\mathrm{v}_2+\ldots+a_n\mathrm{v}_n)=a_1\mathrm{f}(\mathrm{v}_1)+a_2\mathrm{f}(\mathrm{v}_2)+\ldots+a_n\mathrm{f}(\mathrm{v}_n)=0$$

ならば,

$$a_1\mathrm{v}_1+a_2\mathrm{v}_2+\ldots+a_n\mathrm{v}_n=0$$

に限られる．したがって，$\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\in W\}_{i=1}^n$ は線形独立である．

(2) f が単射でないと仮定するとき，

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{v}_i \neq \mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{v}_i$$

でかつ，

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{v}_i) = \mathrm{f}(\mathrm{y}) = \mathrm{f}(\sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{v}_i)$$

を満足する $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$ が存在する. ところが,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{f}(\mathrm{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{f}(\mathrm{v}_i)$$

から,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \mathrm{f}(\mathrm{v}_i) = 0$$

となり，$\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i) \in W\}_{i=1}^{n}$ の線形独立性から，$a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となり仮定に反する.

(3) f は，全射であるため，$W = \mathrm{Im}\ \mathrm{f} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\}$．したがって，$W =< \mathrm{f}(\mathrm{v}_1), \mathrm{f}(\mathrm{v}_2), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{v}_n) >$.

(4) f が全射ではないと仮定すると，W 上には

$$\mathrm{y} \notin \mathrm{Im}\ \mathrm{f} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{f}(\mathrm{v}_i) \in W\}$$

を満足する y が存在する．他方，$W =< \mathrm{f}(\mathrm{v}_1), \mathrm{f}(\mathrm{v}_2), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{v}_n) >$ より，

$$\mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{f}(\mathrm{v}_i)$$

となり，矛盾する.

■

定義 3.4 写像 $f : V \to W$ が全単射かつ線形であるとき，同型写像といい，ベクトル空間 W と V は同型であるという.

定理 3.1 $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ が V の基底であるとき，$\mathrm{f} : V \to W$ が同型写像である．$\Leftrightarrow \{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\}_{i=1}^{n}$ は W の基底である.

証明　補題 3.2(1) および (3) より，$W =< \mathrm{f}(\mathrm{v}_1), \mathrm{f}(\mathrm{v}_2), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{v}_n) >$ かつ $\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\}_{i=1}^{n}$ は線形独立なため，$\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\}_{i=1}^{n}$ は基底である.
逆に，$\{\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\}_{i=1}^{n}$ が W の基底ならば，補題 3.2(4) から，f は全射である．(2) より，f は単射である.

■

定理 3.2 2 つのベクトル空間 V と W が同型である．$\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

証明　定理 3.1 より，f が同型ならば，$\dim W = \dim V$ である．
逆に，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ および $\{\mathrm{w}_i\}_{i=1}^n$ を V と W の基底とするとき，写像

$$\mathrm{f}\ :\ \sum_{i=1}^n a_i\mathrm{v}_i \in V \mapsto \sum_{i=1}^n a_i\mathrm{w}_i \in W$$

は，

(1) $\mathrm{f}(\alpha\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{v}_i + \beta\sum_{i=1}^n b_i\mathrm{v}_i) = \sum_{i=1}^n(\alpha a_i + \beta b_i)\mathrm{w}_i = \alpha\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \beta\mathrm{f}(\mathrm{y})$ から線形写像である．

(2) $\mathrm{f}(\mathrm{v}_i) = \mathrm{w}_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$

を満足するため，定理 3.1 より同型写像となる．

■

定義 3.5 $\dim \mathrm{Ker\ f}$ を f の退化次数といい null f で表す．また，$\dim \mathrm{Im\ f}$ をランクといい rank f で表す．

定理 3.3 線形写像 $\mathrm{f}\ :\ V \to W$ に関して，Im f を張る基底を $\{\mathrm{w}_i = \mathrm{f}(\mathrm{u}_i) \in W\}_{i=1}^{\mathrm{rank\ f}}$ とし，Ker f を張る基底を $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{\mathrm{null\ f}}$ とするとき，

$$\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_{\mathrm{rank\ f}}, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{\mathrm{null\ f}}\}$$

は，V の基底となり，$\mathrm{null\ f} + \mathrm{rank\ f} = \dim V$ となる．

証明

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rank\ f}} a_i\mathrm{u}_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{null\ f}} b_i\mathrm{v}_i = 0 \quad (*)$$

とし，辺々に f を施すと，

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rank\ f}} a_i\mathrm{f}(\mathrm{u}_i) + \sum_{i=1}^{\mathrm{null\ f}} b_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank\ f}} a_i\mathrm{w}_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{null\ f}} b_i\mathrm{f}(\mathrm{v}_i) = 0.$$

$\sum_{i=1}^{\mathrm{null\ f}} b_i\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)$ は，核を張るため，第 2 項は零となり，

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rank\ f}} a_i\mathrm{w}_i = 0.$$

よって，

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{\mathrm{rank\ f}} = 0.$$

$(*)$ に代入すると，

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{null\ f}} b_i\mathrm{v}_i = 0$$

より，同様に

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{\mathrm{null\ f}} = 0.$$

よって，$\{u_i\}_{i=1}^{\text{rank }f} \cup \{v_i\}_{\text{rank }f}^{\text{null }f}$ は線形独立である．
他方，

$$\mathrm{f(x)} \in \mathrm{Im\ f} \Rightarrow \mathrm{f(x)} = \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{w}_i = \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{f(u}_i)$$

から，

$$\mathrm{f(x)} - \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{f(u}_i) = \mathrm{f(x} - \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{u}_i) = 0.$$

したがって，

$$\mathrm{x} - \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{u}_i \in \mathrm{Ker\ f} \Rightarrow \mathrm{x} - \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{u}_i = \sum_{i=1}^{\text{null f}} b_i \mathrm{v}_i.$$

結論，全ての $\mathrm{x} \in V$ は，

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{\text{rank f}} a_i \mathrm{u}_i + \sum_{i=1}^{\text{null f}} b_i \mathrm{v}_i$$

となるため，$V =< \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_{\text{rank f}}, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{\text{null f}} >$.

■

例 3.1 線形写像 $\mathrm{f} \ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2$ を考える．

(1) 像を求める．

$$\begin{aligned} \mathrm{Im\ f} &= \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2\} = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathrm{R}^1\} \\ &= \{\begin{pmatrix} 2s+t \\ 2s+t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathrm{R}^1\} = \{\begin{pmatrix} s' \\ s' \end{pmatrix} \mid s' \in \mathrm{R}^1\} \end{aligned}$$

したがって，rank $f = 1$.

(2) 核を求める．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker\ f} &= \{x \in \mathrm{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{x} = 0\} = \{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2s+t \\ 2s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mid 2s = -t\} \\ &= \{\begin{pmatrix} s \\ -2s \end{pmatrix} \mid s \in \mathrm{R}^1\} \end{aligned}$$

したがって，null $\mathrm{f} = 1$.

(3) 次元公式 null $\mathrm{f} +$ rank $\mathrm{f} = 2$ が成り立つ．

定理 3.4 線形写像 $\mathrm{f} \ :\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{Ax} \in \mathrm{R}^n$ において，rank $\mathrm{A} =$ rank f が成り立つ．

証明　$\mathrm{A} = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\dots|\mathrm{v}_n]$，および R^n の標準基底を $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1}^n$ とすると，

$$\mathrm{Im\ f} =< \mathrm{Ae}_1, \mathrm{Ae}_2, \dots, \mathrm{Ae}_n >=< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n >$$

から，$\mathrm{rank\ f} = \dim \mathrm{Im\ f}$ は，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ の線形独立なベクトルの最大数となり，rank A に等しくなる．

■

今回のポイント 3.1　“線形写像 $\mathrm{f}\ :\ \mathrm{x} \in V \mapsto \mathrm{y} = \mathrm{Ax} \in U$ が逆写像（逆行列 A^{-1}）を持つ” とは，空間 U の任意の点 y が V 上の確定した点 x に戻って来られるという意味である．

今回のポイント 3.2　“空間 U の任意の点 y が V 上の確定した点 x に戻って来られる” ならば，“全射：空間 V のすべての点 x を写像したとき，空間 U 全体を覆える” でなければならず，また “単射：空間 U 上の y が戻る先が唯一存在する” でなけらばならない．

今回のポイント 3.3　“f が全射ならば，$\mathrm{Im\ f} = U$” であり，“単射であるならば，$\mathrm{Ker\ f} = \{0\}$” である．

今回のポイント 3.4　“f が全単射 *(*同型*)* の場合，$\mathrm{A} = [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\dots|\mathrm{v}_n]$” とすれば，$\mathrm{Im\ f} = \{\mathrm{y} = \mathrm{Ax} \mid \mathrm{x} \in V\} =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n >= U$，および $\mathrm{Ker\ f} = \{\mathrm{x} \in V \mid \mathrm{Ax} = 0\} = \{0\}$ である．また，$\dim \mathrm{Im}\ f = \dim < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n >= \mathrm{rank}\ [\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\dots|\mathrm{v}_n] = \dim U = n$，および $\dim \mathrm{Ker\ f} = \mathrm{null\ A} = 0$ である．

今回のポイント 3.5　“$\mathrm{rank\ A} = n$ および $\mathrm{null\ A} = 0$” ならば，A^{-1} が存在する．また，その逆が成り立つ．
