2　線形独立性と次元

復習と確認 2.1 $n \times n$ 正方行列 A において，

$$\mathrm{A}\text{ は正則} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\text{ が存在する} \Leftrightarrow \mathrm{rank}\ \mathrm{A} = n\text{（\textbf{フルランク}）} \Leftrightarrow \det \mathrm{A} \neq 0$$

$$\mathrm{A}\text{ は非正則} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\text{ が存在しない} \Leftrightarrow \mathrm{rank}\ \mathrm{A} < n,\ \mathrm{null}\ \mathrm{A} > 0\text{（\textbf{フルランクではない}）} \Leftrightarrow \det \mathrm{A} = 0$$

が成り立つ．

定義 2.1 $\sum_{i=1}^{k} a_i \mathrm{v}_i = 0$ を満足する係数が，

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

に限られるならば，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ は**線形（一次）独立**であるという．そうでない場合，**線形（一次）従属**であるという．

命題 2.1 $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ は線形従属である．$\Leftrightarrow$ $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ の少なくとも一つのベクトルは，残りのベクトルの線形結合で表される．

証明　$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ が線形従属であると仮定すると，$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathrm{v}_i = 0$ を満たす係数において，非零のものが少なくとも一つ存在する．よって，非零の係数を a_j とすると，

$$\mathrm{v}_j = -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} \mathrm{v}_i.$$

逆に，あるベクトル v_j が他のベクトルの線形結合で表現できるとき，

$$\mathrm{v}_j = \sum_{i \neq j} a_i \mathrm{v}_i$$

から，

$$0 = a_1 \mathrm{v}_1 + a_2 \mathrm{v}_2 + \ldots - 1 \mathrm{v}_j + \ldots + a_k \mathrm{v}_k.$$

よって，$a_j = -1$ から線形従属となる．

■

定理 2.1 $V = < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m >$ であるとき，$\{\mathrm{w}_i \in V\}_{i=1}^{n}$ が線形独立であるならば，$n \leq m$ である．

証明　仮定から，$\mathrm{w}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\mathrm{v}_j$ より，

$$\sum_{i=1}\alpha_i \mathrm{w}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\mathrm{v}_j) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,j})\mathrm{v}_j = 0$$

を満足する係数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ は，

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \quad (*)$$

に限られなくてはならない．しかし，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,1} &= \alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots + \alpha_n a_{n,1} = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,2} &= \alpha_1 a_{1,2} + \alpha_2 a_{2,2} + \ldots + \alpha_n a_{n,2} = 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,m} &= \alpha_1 a_{1,m} + \alpha_2 a_{2,m} + \ldots + \alpha_n a_{n,m} = 0
\end{aligned}$$

は，変数の数 n が等式の数 m を越えるとき $(n > m)$，$(*)$ 以外の解を持ち，仮定に反する．

■

補題 2.1 $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ は線形独立であるとする．

(1) $\mathrm{w} \notin < v_1, v_2, \ldots, v_k >$ ならば，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k} \cup w$ は線形独立である．

(2) $V \neq < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ ならば，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k} \cup \mathrm{w}$ が線形独立となる w が存在する．

証明

(1)

$$a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 + \ldots + a_k\mathrm{v}_k + a\mathrm{w} = 0$$

とするとき，$a \neq 0$ の場合，w は，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ の線形結合で表現されるため仮定に反する．ゆえに，$a = 0$ となる．また，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k}$ は線形独立であるため，

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a = 0.$$

(2) $V \neq < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ より，$\mathrm{w} \notin < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ が存在する．(1) から，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^{k} \cup w$ は線形独立である．

■

定義 2.2 V を張るベクトル $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ が線形独立であるとき，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ を V の基底という．また，任意のベクトルを基底の線形結合 $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathrm{v}_i$ で表現するとき，$\{a_i \in \mathrm{R}^1\}_{i=1}^{n}$ を成分という．

定理 2.2 $V = < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_m >$ ならば，$n \leq m$ を満たす基底 $\{\mathrm{w}_i\}_{i=1}^{n}$ が存在する．

証明　定理 2.1 より，線形独立なベクトル $\{\mathrm{w}_i\}_{i=1}^k$ は，常に $k \leq m$ を満たす．仮に，$V \neq < \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_k >$ であるならば，補題 2.1(2) より，線形独立なベクトル w_{k+1} が見つけられ，これを反復することで，$V = < \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_n >$ となる $n \leq m$ が構成できる．

■

命題 2.2 $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ は V の基底である．$\Leftrightarrow$ 任意の $\mathrm{x} \in V$ の成分は唯一である．

証明　仮に $\mathrm{x} \in V$ の成分が 2 組あると仮定すると，

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{v}_i = \sum_{i=1}^n b_i \mathrm{v}_i$$

から，

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)\mathrm{v}_i = 0.$$

基底は線形独立であるため，

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_n - b_n = 0.$$

逆に，全ての $x \in V$ が $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ の線形結合で表されるため，

$$V = < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n > .$$

また，$\mathrm{x} = 0$ の成分も唯一であるため，

$$0 = 0\mathrm{v}_1 + 0\mathrm{v}_2 + \ldots 0\mathrm{v}_n$$

に限られる．すなわち，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ は線形独立である．

■

定義 2.3 V を張る基底 $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^n$ のベクトルの数を次元といい，$\dim V = n$ で表す．

定理 2.3 W が V の部分空間であるならば，$\dim W \leq \dim V$．$\dim W = \dim V$ ならば $W = V$ である．

証明　$\dim V = n$ とするとき，定理 2.2 より，W の基底の数は n 以下となる．よって，$\dim W \leq n = \dim V$．他方，$\dim W = \dim V$ のとき，$\mathrm{x} \notin W \subset V$ が存在すれば，$\dim V > n$ となり，仮定に反する．よって，$W = V$ でなければならない．

■

定理 2.4 $\dim V = n$ であるとき，$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^n$ が線形独立であるか，$V = < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ であるなら，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ は基底である．

証明　V の部分空間を $W =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ とすると，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ は W の基底となるため，$\dim W = n$ である．よって，定理 2.3 より $n = \dim W = \dim V$ から $V = W$ となる．
他方，$V =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ とするとき，$\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ が線形従属であるならば，$\dim V < n$ となり，仮定に反する．

■

例 2.1 R^4 上のベクトル

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．部分空間 $W =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 >$ 方程式は，

$$\begin{aligned} W &= \{a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathrm{R}^1\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ a+b \\ a+c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathrm{R}^1\} = \{\begin{pmatrix} s \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathrm{R}^1\} \\ &= \{s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathrm{R}^1\} \end{aligned}$$

から，基底 $\{\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ で張られる 2 次元部分空間である．

今回のポイント 2.1 “ベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ が線形独立” とは，$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ に沿って，原点に戻れる**閉ループが存在しない**という意味である．

今回のポイント 2.2 “線形空間 V を張るベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ が線形独立である” とは，$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ に沿って，原点から任意の点 $\mathrm{x} \in V$ まで到達できる**唯一**のルートが**存在**するという意味である．

今回のポイント 2.3 “行列 $[\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$ の階段行列への基本変形” とは，ベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ から閉ループを取り去る処理である．

今回のポイント 2.4 rank $[\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$ とはベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ における線形独立なベクトルの最大数に等しい．また，$\dim < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ とはベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ における線形独立なベクトルの最大数に等しい．よって，rank $[\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\ldots|\mathrm{v}_n]$ は $\dim < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n >$ に等しい．
