第１回レポート課題

【１】 非零列ベクトルを $a\in R^n$ とするとき，$\dim\{x\in R^n : a^T x = 0\}$を求めよ．（※以降の問題ではベクトルは列ベクトル表現とする）

【２】 非零列ベクトルを $a\in R^n$ とするとき，$\mathrm{rank}(aa^T)$および $\mathrm{null}(aa^T)$を求めよ．必要であれば，表記 $a^T=(a_1,\ldots,a_n)$を用いよ．

【３】 線形独立な 2 ベクトル$\{a,b\in R^2\}$を用いて，任意の $x\in R^2$ を線形結合 $x=\alpha a+\beta b$ で表現する．

(a) 逆行列により α と β を求めよ．このとき線形独立という仮定をどこで用いたのか答えよ．

(b) 内積を用いて連立方程式により求めよ．このとき線形独立という仮定をどこで用いたのか答えよ．

【４】 色のデータ集合$\{x_i=(r_i,g_i,b_i)^T : i=1,\ldots,D\}$をある正則な線形写像 f で変換したデータ$\{fx_i : i=1,\ldots,D\}$にメディアンカットを適用しクラスタリングを行うと，より誤差の少ない結果が得られたとする．このとき，f が満たす 2 つの性質を考察せよ．

第２回レポート課題

【１】 $n\times n$ 正方行列 A と B が，$AB=0$ を満足するとき，$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$ の値域を核と像の関係を用いて求めよ．

【２】 線形写像$F : x \in R^n \longmapsto \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x \in R^n$について次の設問に答えよ．尚，$0\leqq k\leqq n$ であることに注意せよ．

(a) $\{u_i\in R^n : i=1,2,..,n\}$が正規直交基底であるとき，核の基底を求めよ．

(b) $\{u_i\in R^n : i=1,2,..,n\}$が非直交基底であるとき，核の基底を求めよ．

【３】 $n\times n$ 正方行列 A に関して $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}AA^T$ を示せ．必要であれば，$[a_1|\ldots|\ a_n]$なる表記を用いてよい．（※行列の分解等は使用しないこと）

【４】 $\{u,v,w\in R^3\}$を非直交基底とする．3×3 正方行列 A を作用素とする線形写像 f_A の像が<u,v>で核が<w>であるとき，必要最小限の定数を用いて A を表現せよ．

第３回レポート課題

【１】n×n 正方行列 A が固有値αと固有ベクトル u を持つとき，任意の正則行列 P で相似となる行列 PAP^{-1} は固有値αを持つことを示せ．また，その固有ベクトルを求めよ．

【２】n×n 正方行列 A が複素共役固有値$\sigma \pm i\omega$と固有ベクトル u±iv を持つとき，n 次元実ベクトル u と v は線形独立であることを背理法で示せ．（※計算過程の等式には複素単位を含まないように示せ）

【３】$\{u_i \in R^n : i=1,2,..,n\}$が正規直交基底であるとき，n×n 正方行列

$$A = \alpha_1 u_1 u_1^T + \ldots + \alpha_k u_k u_k^T \quad (k<n,\ \alpha_i \neq 0,\ \alpha_i \in R^1)$$

のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

【４】n×n 正方行列

$$A = \alpha_1 u_1 v_1^T + \ldots + \alpha_n u_n v_n^T$$

の固有値と固有ベクトルが$\{\alpha_i \in R^1 : i=1,2,..,n\}$と$\{u_i \in R^n : i=1,2,..,n\}$であるとき，$\{v_i \in R^n : i=1,2,..,n\}$が満たすべき条件を述べよ．

第４回レポート課題

【１】$\{u_i \in R^n : i=1,2,..,n\}$が正規直交基底であるとき，n×n 正方行列 $A = u_1u_1^T + \ldots + u_nu_n^T$ を求めよ．

【２】直交行列 Q が複素共役固有値$\sigma \pm i\omega$を持つとき，その大きさ$\sigma^2 + \omega^2$は 1 となることを示せ．（※計算過程の等式には複素単位を含まないように示せ）

【３】任意の正方行列 A は，直交行列 Q と上三角行列 R の積で表現できることを示せ．また，$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,A^T$ を示せ．

【４】$\{u,v \in R^2\}$が正規直交基底であるとき，2×2 正方行列 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}[u\,|\,u]$と $B=\frac{1}{\sqrt{2}}[v\,|\,-v]$は，重複直交変換の性質

$$AA^T+BB^T=I,\quad BA^T=AB^T=0$$

を満足することを示せ．

第５回レポート課題

【１】実対称行列 A が正定値であるなら， $A=BB^T$ を満たす正則な正方行列 B が存在することを示せ.

【２】実正方行列 A から作られる対称行列 $A+A^T$ が正定値の場合，A の固有値の実部はすべて正となることを示せ.

【３】拘束条件 $x_1^2+\ldots+x_2^2=1$ の下でのコスト $|\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n|$ の最大化問題をスペクトルノルムの知見を用いて解け.

【４】正則行列 A を作用素とする線形写像による単位球面 $\{x\in R^n : x^Tx=1\}$ の像 $\{y=Ax\in R^n : x^Tx=1\}$ は楕円曲面となることを示せ.

第６回レポート課題

【１】 n×n 正定値行列 A が固有値 $\{\alpha_i\in R^1 : i=1,2,..,n\}$ と固有ベクトル $\{u_i\in R^n : i=1,2,..,n\}$ を持つとき，線形方程式 $b=Ax$ $(b,x\in R^n)$ の解 x^* を固有ベクトルの線形結合で表せ.

【２】 n×n 正方行列 A が非負の実固有値 $\{\alpha_i\in R^1 : i=1,2,..,n\}$ と固有ベクトル $\{u_i\in R^n : i=1,2,..,n\}$ を持つとき，線形方程式 $b=Ax$ $(b,x\in R^n)$ の解 x^* を固有ベクトルの線形結合で表せ.（※【１】との異なりに注意せよ）

【３】 n 次元データベクトル $\{x_i\in R^n : i=1,2,..,D\}$ を包含する部分空間 X の次元 k を求めよ. また，X を張る正規直交基底 $\{e_i\in R^n : i=1,2,..,k\}$ を求めよ.

【４】 線形方程式 $b=Ax$ $(b,x\in R^n)$ の解 x^* を反復計算により求める方法を考えてみる.

(a) x に関する線形方程式 $x = Bx+b$ の解が x^* となるように線形作用素 B を定めよ.

(b) $||B||<1$ ならば x_0 に依存せず漸化式 $x_{n+1} = Bx_n+b$ $(n\geqq 0)$ の解は x^* に収束することを示せ.

第７回レポート課題

レポート提出はありません.

第８回レポート課題

【１】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の線形作用素 A が実固有ベクトル α と固有ベクトル u を持つとき，直線 $E_\alpha=\{su : s\in R^1\}$上に初期値 x_0 を持つ軌道 $x(x_0,t)$は常に E_α上に存在することを示せ.

【２】 線形差分方程式 $x_n = Ax_{n-1}$ の線形作用素 A が実固有ベクトル α と固有ベクトル u を持つとき, 直線 $E_\alpha=\{su : s\in R^1\}$上に初期値 x_0 を持つ軌道 $x(x_0,n)$は常に E_α上に存在することを示せ.

【３】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の平衡点 O は，$A+A^T<0$ の場合，漸近安定となることを示せ.

【４】 線形差分方程式 $x_n = Ax_{n-1}$ の不動点 O は，$||A||<1$ で漸近安定となることを示せ. また，上記は漸近安定性の十分条件となる理由を述べよ.

第９回レポート課題

【１】4 次元空間の 3 次元超曲面 $w=\exp(x^2+y^2+z^2)$の点$(x,y,z)=(a,b,c)$における接平面を求めよ.

【２】スカラーポテンシャル $\phi\in C^2 : x\in R^n \mapsto \phi(x)\in R^1$ の勾配ベクトル場

$$F : x\in R^n \mapsto -\mathrm{grad}\,\phi(x)\in R^n$$

の任意の点 p においてすべて固有値は実固有値となることを示せ.

【３】スカラーポテンシャル $\phi\in C^2 : x\in R^n \mapsto \phi(x)\in R^1$ に関する最急降下法

$$dx/dt=-\mathrm{grad}\,\phi(x)$$

の軌道を $x(t)$とするとき，$d\phi(x(t))/dt<0$ を示せ.

【４】$m\times n$ 非正方行列 A および $b\in R^m$ によるスカラーポテンシャル

$$\phi : x\in R^n \mapsto \phi(x)=||Ax-b||^2\in R^1$$

の勾配ベクトル場 $F : x\in R^n \mapsto -\mathrm{grad}\,\phi(x)\in R^n$ の平衡点 p が満たす方程式を導き，その解 p^*を求めよ.