第8章　行列の初等関数とその応用

8.1　行列の距離空間

【定理 8.1 】 $n \times n$ 正方行列を元とする集合 L に，スペクトルノルムによる距離

$$d(A,B) = \| A - B \| = \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Be \|$$

を導入した空間を (L,d) とする．(L,d) は，距離の公理

(1) $d(A,B) \geq 0$, for all $A, B \in L$.

(2) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, for all $A, B \in L$.

(3) $d(A,B) = d(B,A)$, for all $A, B \in L$.

(4) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, for all $A, B, C \in L$.

を満たし，距離空間となる．

【定理 8.2 】 (L,d) は完備な距離空間である．

【定理 8.1 の証明】

(1) $d(A,B) = \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Be \| \geq 0$

(2) $\| Ax - Bx \| \leq \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Be \| = 0$ より，$Ax = Bx$ for all $x \in R^n$.
よって，x を標準基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ とすると，$A[e_1|\dots|e_n] = B[e_1|\dots|e_n]$ から $A = B$.
一方，$A = B$ ならば直ちに $d(A,B) = \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Be \| = 0$.

(3) $d(A,B) = \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Be \| = \sup_{\|e\|=1} \| Be - Ae \| = d(B,A)$

(4) ノルムに関する三角不等式を用いて，

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Ce + Ce - Be \| \leq \sup_{\|e\|=1} \{ \| Ae - Ce \| + \| Ce - Be \| \} \\ &\leq \sup_{\|e\|=1} \| Ae - Ce \| + \sup_{\|e'\|=1} \| Ce' - Be' \| = d(A,C) + d(C,B). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【定理 8.2 の証明】無限列 $\{A_i \in L\}_{i=0}^{\infty}$ は，コーシー列であるとする．すなわち，$\lim_{i,j\to\infty} d(A_i, A_j) \to 0$.
ここで，任意の $x \in R^n$ に対して点列 $\{p_i(x) = A_i x \in R^n\}_{i=0}^{\infty}$ を考えると，

$$\lim_{i,j\to\infty} \| p_i(x) - p_j(x) \| = \lim_{i,j\to\infty} \| A_i x - A_j x \| \leq \lim_{i,j\to\infty} d(A_i, A_j) \| x \| \to 0$$

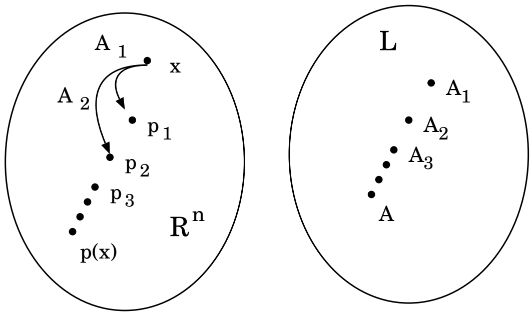

図 8.1: 実空間と行列空間におけるコ− シ− 列

となり，$\{p_i(x) = A_i x\}_{i=0}^{\infty}$ もコーシー列となる．したがって，点列における極限

$$\lim_{i\to\infty} p_i(x) = p(x) \in R^n$$

が存在する．(図 8.1 参照）また，x は任意であるため，標準基 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ をとると，

$$\lim_{i\to\infty} p_i(e_k) = p(e_k) \quad \text{for all } k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

これを用いて，行列 $A = [p(e_1)|p(e_2)|\ldots|p(e_n)] \in L$ を定める．$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ から，

$$p(x) = \lim_{i\to\infty} A_i x = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_i e_k = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_i(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p(e_k).$$

よって，

$$Ax = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p(e_k) = p(x).$$

これより，

$$\lim_{i\to\infty} d(A_i, A) = \lim_{i\to\infty} \sup_{\|e\|=1} \parallel A_i e - Ae \parallel = \lim_{i\to\infty} \sup_{\|e\|=1} \parallel p_i(e) - p(e) \parallel \to 0$$

から，$\lim_{i\to\infty} d(A_i, A) \to 0$. L 上の任意のコ− シ− 列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ は，L 上のある行列 A に常に収束するため，(L, d) は完備な距離空間をなす．■

8.2　行列の級数と初等関数

【定義 8.1 】 無限列 $\{A_i \in L\}_{i=0}^{\infty}$ の和 $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ の部分列 $\sum_{i=0}^{n} A_i$ が収束

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A_i \to A$$

するのであれば，級数は**収束**するという．また，部分列 $\sum_{i=0}^{n} \parallel A_i \parallel$ が収束するならば，級数は絶対収束するという．

【定義 8.2 】 係数列 $\{a_i \in R^1\}_{i=0}^{\infty}$ と無限列 $\{A^i \in L\}_{i=0}^{\infty}$ による線形和 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$ を，**行列の巾級数**という．

【補題 8.1 】 $\| A \| \leq a$ ならば，$\| A^n \| \leq a^n$.

【定理 8.3 巾級数の収束**】** 巾級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ の収束半径が r であるとき，$\| A \| < r$ ならば級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$ は収束する．

【補題 8.1 証明】

$$\| A^n \| = \sup_{\|e\|=1} \| AA^{n-1}e \| \leq a \| A^{n-1} \| .$$

を繰り返して，$\| A^n \| \leq a^n$. ■

【定理 8.3 証明】部分列 $\sum_{i=0}^{n} a_i A^i$ がコーシー列となることを示す．$n > m$ として，

$$\| \sum_{i=0}^{n} a_i A^i - \sum_{i=0}^{m} a_i A^i \| = \| \sum_{i=m}^{n} a_i A^i \| \leq \sum_{i=m}^{n} \| a_i A^i \|$$

補題 8.1 より，

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=m}^{n} \| a_i A^i \| \leq \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=m}^{n} |a_i| \, \| A \|^i \to 0.$$

したがって，部分列はコーシー列であり，ある極限値に収束する．■

上述した定理によって，実数直線上で定義される指数，正弦，余弦関数は行列においても定義できる．

【定義 8.3 】 次の収束する巾級数で定義される関数

- $e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 \ldots.$
- $\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \ldots.$
- $\cos A = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \ldots.$
- $\log(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^2 - \ldots.$

を各々，指数関数，正弦関数，余弦関数, 対数関数という．

【定理 8.4 等比級数】 行列 X の級数 $\sum_{i=0}^{\infty} X^i$ を等比級数といい．$\| X \| < 1$ ならば，収束し，

$$\sum_{i=0}^{\infty} X^i = (I - X)^{-1}.$$

【定理 8.5 】 2 つの行列 A, B の積に $AB = BA$ が成り立つならば，$e^{A+B} = e^A e^B$.

【定理 8.4 の証明】定理 8.3 から，等比級数は収束する．また，

$$(I - X)\sum_{i=0}^{\infty} X^i = \sum_{i=0}^{\infty} X^i - \sum_{i=1}^{\infty} X^i = I$$

から，$\sum_{i=0}^{\infty} X^i = (I - X)^{-1}$ となる．■

8.3 線形微分方程式

【定義 8.4 】ベクトル関数 $x\ :\ t \in R^1 \mapsto x(t) \in R^n$ および定数行列（線形作用素）$A\ :\ n \times n$ による方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \in R^1 \tag{8.1}$$

を n **次元線形微分方程式**（n**-dimensional linear differential equation**）といい，右辺に定数ベクトル $b \in R^n$ が加算された方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad t \in R^1$$

を n **次元アフィン微分方程式**（n**-dimensional affine differential equation**）という．

【定義 8.5 】n 次元線形微分方程式 (8.1) を満足する自明解 $x(t) = 0$ を**平衡点**（**equiriburium**）といい，一般解

$$x(t) = x(x_0, t), \quad x_0 = x(0)$$

を**初期条件**（**initial condition**）x_0 から発する**軌道**（**orbit**）という．

【定義 8.6 】n 次元線形微分方程式 (8.1) の一般解 $x(x_0, t)$ が，

$$\lim_{t\to\infty} x(x_0, t) \to 0, \quad \text{for all } x_0\ \in R^n$$

を満たす時，微分方程式は**漸近安定**（**asymptotically stable**）であるといい，原点を**安定平衡点**（**stable equiriburium**）という．

【定義 8.7 】n 次元線形微分方程式 (8.1) の一般解 $x(x_0, t)$ に対して，ある有界領域 V および $U (\subseteq V)$ が存在し，

$$x(x_0, t) \in V, \quad \text{for all } x_0\ \in U$$

を満たす時，微分方程式は**リアプノフ安定**（**Lyapnov stable**）であるという．

線形作用素 A が正則である場合，$x = y - A^{-1}b$ なる変数変換でアフィン系は線形系に帰着されることに注意する．

【定理 8.6 線形微分方程式の一般解】n 次元線形微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ の一般解は，初期条件 $x_0 \in R^n$ と基本解行列 e^{At} の積 $x(x_0, t) = e^{At}x_0$ で与えられる．

【証明】$x(t) = e^{At}x_0$ の両辺を微分すると，$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$．また，$x(0) = x_0$ より，$x(t) = e^{At}x_0$ は点 x_0 を通過する．したがって，線形微分方程式の解の存在と一意性より，$x(t) = e^{At}x_0$ は点 x_0 を通過する解である．■

線形作用素 A を正則行列 P を用いてジョルダン分解 $P^{-1}AP = J$ すると，$x = Py$ なる座標変換で，微分方程式は

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = Jy$$

となる．この座標系での解 $y = e^{Jt}y_0$ を用いて，

$$Py = Pe^{Jt}P^{-1}Py_0$$

から，$x(t) = Pe^{Jt}P^{-1}x_0 = e^{At}x_0$．したがって，ジョルダン行列 J の指数行列を用いることで行列の積として解を与えることができる．
次に，線形作用素 A がジョルダン行列であると仮定し、2 次元線形微分方程式の基本解の分類を与える．

- 線形作用素 A が相異なる実固有値 α_1 および α_2 を持つとき，

$$\frac{dx(t)}{dt} = [J(\alpha_1, 1) \oplus J(\alpha_2, 1)]\, x(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} x(t)$$

　から，一般解は，$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} x_0$.

- 線形作用素 A が重根 α を持つとき，

$$x(t) = J(\alpha, 2)x_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x(t)$$

　から，一般解は，$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} x_0$.

- 線形作用素 A が共役複素固有値 $\sigma \pm i\omega$ を持つとき，

$$x(t) = J(\sigma \pm i\omega, 2)x(t) = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix} x(t)$$

　から，一般解は，$x(t) = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} x_0$.

【定理 8.7 線形微分方程式の漸近安定条件】線形微分方程式における線形作用素 A のすべての固有値の実部が負であるとき，線形微分方程式は，漸近安定である．また，逆も真である．

【証明】固有値を $\{\sigma_i + i\omega_i\}_{i=1}^{n}$ とするとき，任意の線形微分方程式の一般解は，いずれかの基底関数

$$e^{\sigma_i t}, t^m e^{\sigma_i t}, e^{\sigma_i t}\sin\omega_i t, e^{\sigma_i t}\cos\omega_i t$$

の線形結合によって表現される．仮に，$\sigma_k \geq 0$ であるとき，対応する固有空間上の軌道は発散もしくは停滞する．逆に，$\sigma_i < 0$ for all i であるとき，すべての基底関数の値は零へ収束するため，線形結合で表される一般解も零へ収束する．■

上記の証明の中で，実部が 0 である固有値が一つでも存在する（他の実部はすべて負である）場合は，その固有ベクトルの方向で軌道は停滞するため，漸近安定でも不安定でもないリアプノフ安定となることに注意せよ．

8.4 線形差分方程式

【定義 8.8 】ベクトル関数 $x\ :\ t \in Z^1 \mapsto x_t \in R^n$ および定数行列 $A\ :\ n \times n$ による連立方程式

$$x_t = Ax_{t-1} \tag{8.2}$$

を n **次元線形差分方程式**（n**-dimensional linear difference equation**）といい，右辺に定数ベクトル $b \in R^n$ を加算された方程式

$$x_t = Ax_{t-1} + b$$

を n **次元線形アフィン差分方程式**（n**-dimensional affine difference equation**）という．

【定義 8.9 】n 次元線形差分方程式 (8.2) を満足する自明解 $x_t = 0$ を**不動点**（**fixed point**）といい，一般解

$$x_t = x(x_0, t) \in R^n$$

を**初期条件** *(***initial condition***)*x_0 から発する**軌道**（**orbit**）という．

【定義 8.10 】n 次元線形差分方程式 (8.2) の一般解 $x(x_0, t)$ が，

$$\lim_{t\to\infty} x(x_0, t) \to 0, \quad \text{for all } x_0 \in R^n$$

を満たす時，差分方程式は**漸近安定** *(***asymptotically stable***)* であるといい，不動点を**安定不動点**（**stable fixed point**）という．また，

$$x(x_0, 1) = 0$$

なる x_0 が存在する場合，$\{ax_0 : a \in R^1\}$ を**超安定** *(***super stable***)* 方向という．

【定義 8.11 】n 次元線形差分方程式 (8.2) の一般解 $x(x_0, t)$ に対して，ある有界領域 V および $U(\subseteq V)$ が存在し，

$$x(x_0, t) \in V, \quad \text{for all } x_0 \in U$$

を満たす時，差分方程式は**リアプノフ安定** *(***Lyapnov stable***)* であるという．

点 $x_0 \in R^n$ を与えたとき，差分方程式の解は帰納的に

$$x(x_0, t) = Ax_{t-1} = A^2 x_{t-2} = \ldots\ldots = A^t x_0$$

で与えられる．また，超安定性とは零固有値に起因することに注意を促す．
次に，線形作用素 A がジョルダン行列であると仮定し、2 次元線形差分方程式の基本解の分類を与える．

- 線形作用素 A が相異なる実固有値 α_1 および α_2 を持つとき，

$$x_t = [J(\alpha_1, 1) \oplus J(\alpha_2, 1)]\, x_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} x_{t-1}$$

  に帰着される．一般解は，

$$x_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} x_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} x_{t-2} = \ldots. = \begin{pmatrix} \alpha_1^t & 0 \\ 0 & \alpha_2^t \end{pmatrix} x_0.$$

- 線形作用素 A が重根 α を持つとき，

$$x_t = J(\alpha, 2)x_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x_{t-1}$$

から，一般解は，

$$x_t = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha^1 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} x_{t-2} = \begin{pmatrix} \alpha^t & t\alpha^{t-1} \\ 0 & \alpha^t \end{pmatrix} x_0.$$

- 線形作用素 A が共役複素固有値 $\sigma \pm i\omega$ を持つとき，

$$x_t = J(\sigma \pm i\omega, 2)x_{t-1} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix} x_{t-1}.$$

この行列は，対角行列と回転行列によって

$$\begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma^2+\omega^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma^2+\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}) & -\sin(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}) \\ \sin(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}) & \cos(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}) \end{pmatrix}$$

で分解できるため，一般解は

$$x_t = J(\sigma \pm i\omega, 2)x_{t-1} = \left(\sqrt{\sigma^2+\omega^2}\right)^t \begin{pmatrix} \cos(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma})t & -\sin(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma})t \\ \sin(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma})t & \cos(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma})t \end{pmatrix} x_0.$$

【定理 8.8 線形差分方程式の漸近安定条件】線形差分方程式の線形作用素 A のすべての固有値の大きさが 1 未満であるとき，線形差分方程式は，漸近安定である．また，逆も真である．

大きさが 1 である固有値が一つでも存在する（他の実部はすべて 1 より小さい) 場合は，その固有ベクトルの方向で軌道は停滞するため，漸近安定でも不安定でもないリアプノフ安定となることに注意せよ．

8.5　情報処理への展開

8.5.1　乗算を用いない正弦関数の計算方法

デジタル計算機において三角関数あるいは指数関数等の初等関数は，あらかじめライブラリの中の組み込み関数として定義されている．しかし，DSP あるいは汎用 CPU を含まないデジタル回路においては，三角関数をいかに実装するかが，一つの問題となる．例えば，テーラー級数展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

を用いる場合，乗算器が必要となり，回路規模は大きくなる．また，数値テーブルを ROM により実装する方法は，技術的につまらない解法である．ここでは，本章で学んだ差分力学系の知識を用いてこの問題に一つの解を与えてみよう．

調和振動の条件　振動子モデルとして，2 次元差分力学系

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

を考える．(8.3) の軌道は，漸化式

$$x_{n+1} = 2ax_n + bx_{n-1}$$

を用いて再帰的に計算できるため，a および b が，2 巾の有理数 $\{\ldots, 4^{-1}, 2^{-1}, 1, 2, 4, \ldots\}$ の線形結合となる場合，乗算を用いずにビットシフトで実装できる．

調和振動は，軌道が不変円周上に拘束され回転しつづける現象である．したがって，線形作用素は領域保存

$$|\det \begin{pmatrix} 2a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}| = |b| = 1$$

でなければならない．仮に，線形作用素が非保存（散逸）である場合，軌道は，必ず発散するか，原点へ収束する．また，(8.3) が振動するには，固有値が複素共役となる必要がある．したがって，特性方程式

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2a & -b \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 - a^2 - b = 0$$

から，$a^2 + b < 0$ となり，少なくとも $b < 0$ でなければならない．よって，領域保存条件と併せて，$b = -1$ となり，$-1 < a = \cos\theta < 1$ が発振条件となる．
以上の結果から (8.3) は，

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

となり，その固有値は，$\cos\theta \pm i\sin\theta$．線形作用素のジョルダン細胞は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

となり，一般解は，

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin(n+1)\theta & \sin n\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

となる．

2 つの計算方法

$$x_{n+1} = 2\cos\theta x_n - x_{n-1}$$

を初期条件 $(x_0, x_1) = (0, \alpha)$ で反復すると，正弦関数

$$x_n = \frac{\alpha \sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

が計算できることに注意する．よって，初期条件を $\alpha = \sin\theta$ とするとき，解は振幅が 1 の正弦関数

$$x_n = \sin(n\theta) \tag{8.5}$$

となる．他方，$\cos\theta \ll 1$ を仮定して，$\theta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\phi$ $(\phi \ll 1)$ とすると，テーラー展開から

$$\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{4}) = \cos(\frac{\phi}{4}) = 1 + O(\phi^2)$$

から，4 反復毎の出力が正弦関数となる解

$$x_{4m} = -\frac{\sin(m\phi)}{\sin\theta} \approx \sin(m\phi) \tag{8.6}$$

が得られる．

ビットシフトによる正弦関数の実装　十分に大きな整数 $k > 0$ を設定し,

(A) $\cos\theta = 1 - 2^{-k} \simeq 1$

(B) $\cos\theta = \sin(\frac{1}{4}\phi) = 2^{-k} \ll 1$

とすると解 (8.5) および (8.6) は，それぞれビットシフトによる漸化式

(A) $x_{n+1} = (2 - \ 2^{-k+1})x_n - x_{n-1}$

(B) $x_{n+1} = 2^{-k+1}x_n - x_{n-1}$

で計算できる．ここで，各々の回転角 θ および ϕ が十分に小さいとき，正弦関数値は密に出力されるため，適当な間隔でサンプリングすることでいかなる周期の正弦関数も近似できる．

最後に，(A) および (B) ともに実用上の有効性があるか，さらに調べよう．各々の場合，k に対する回転角を θ_k および ϕ_k として，テーラー展開

(A) $\cos\theta_k = 1 + O(\theta_k^2)$

(B) $\sin\phi_k = \frac{1}{4}\phi + O(\phi_k^3)$

を考える．よって，シフトレジスタの精度をさらに $d[bit]$ あげた場合の回転角は,

(A) $\theta_k \simeq \theta_{k+d}$

(B) $\phi_k : \phi_{k+d} \simeq 1 : 2^{-d}$

となる．即ち，(A) の場合は，シフトレジスタの精度をいくら上げても，正弦関数の細密さは不変となることがわかる．他方，(B) の場合は回転角も 2^{-d} に比例して細かくなるため，(B) が実用上の有効性を持つと考えられる．

章末問題

【**問題 8.1** 積に関して可換な行列の指数関数】定理 8.5 を証明せよ．

【**問題 8.2** ジョルダン細胞と指数関数】次のジョルダン細胞 J の指数関数 e^J を巾級数から計算せよ.（ヒント：(2) – (3) では，対角成分と非対角成分を分離して定理 8.5 を利用せよ.）

$$(1)\quad J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},\quad (2)\quad J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\quad (3)\quad J = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix}$$

【**問題 8.3** 】線形微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ の一般解を求めよ．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad (2)\ A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix},\quad (3)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

【**問題 8.4** 】問題 8.3 の (1) から (3) の線形作用素に関して，線形差分方程式 $x_{t+1} = Ax_t$ の一般解を求めよ．

【**問題 8.5** 】線形差分方程式 $x_{t+1} = Ax_t$ は，$\| A \| < 1$ なるとき，漸近安定となることを示せ．また，スペクトルノルムにおける条件 $\| A \| < 1$ は，漸近安定性の十分条件となる理由を述べよ．

【問題 8.6 】線形微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ の平衡点 0 は，$A + A^T$ がいかなる条件を満足するとき，漸近安定あるいはリアプノフ安定となるか, 理由とともに答えよ.

【問題 8.7 】任意の正の実数 a に対して $\frac{a}{3}$ をビットシフトと加減算のみで計算する方法を述べよ.

【問題 8.8 】$n \times n$ 実正方行列 A が、実固有値 $\alpha \in R^1$ とその固有ベクトル $u \in R^n$ を持つとき、次の設問に答えよ。

(1) 初期条件 $x(0) = su$ $(s \in R^1)$ に関する線形微分方程式 $\frac{dx}{dt} = Ax$ の軌道 $x(t)$ を求めよ.

(2) (1) から理解できる事を述べよ.

【問題 8.9 】時系列データ $\{d_i \in R^1 : i = 0, 1, \ldots\}$ に予測符号化を適用し，差分

$$\delta_i = d_i - \alpha d_{i-1} \quad (\alpha \geq 0)$$

を送信する．仮に，受信側では $i = I$ の途中から x_I を通知されずに初期条件を $y_I = 0$ として，

$$y_{I+j} = \delta_{I+j} + \alpha y_{I+j-1} \quad (j \geq 0)$$

によって復号を開始するとき，十分に大きな J 以降では,

$$y_{I+j} = d_{I+j} \quad (\text{for all j} \geq \text{J})$$

と正確に復号できるであろうか？α の値に注意して考察せよ.