第3章　種々の部分空間

3.1　直交補空間

【定義 3.1 】 2 つの部分空間 V および U の基底 $\{v_i\}_{i=1}^k$ および $\{u_i\}_{i=1}^m$ に含まれるベクトルが，線形独立であるとき，基底 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^k \cup \{u_i \in R^n\}_{i=1}^m$ で張られる部分空間を V と U の**直和 (direct sum)** といい，$U \oplus V$ と表記する．特に，$R^n = R^{k+m} = V \oplus U$ が成り立つとき，U を V の**補空間 (complement)** という．

【定義 3.2 】 部分空間 $V \subset R^n$ と部分空間 $U \subset R^n$ が，

$$v^T u = 0 \quad \text{for all } v \ \in \ V, \ \text{all } u \ \in \ U$$

を満たすとき，*2* つの部分空間は直交するという．

【定義 3.3 】 部分空間 V とその補空間 U が直交するとき，U を V の**直交補空間 (orthogonal complement)** といい，$V^\perp$ と表記する．

【命題 3.1 $n-m$ **次元線形部分空間】** 線形独立な $m(<n)$ 個のベクトル $\{y_i\}_{i=1}^m$ と直交するベクトル集合

$$\alpha = \{x \in R^n \mid y_1^T x = y_2^T x = \ldots = y_m^T x = 0\}$$

は，$n-m$ 次元部分空間である．

【命題 3.2 直交補空間】 非直交基底 $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^n$ から m 個選択された基底ベクトルによって張られる部分空間

$$V =< u_1, u_2, \ldots, u_m >$$

の直交補空間は，その双直交基底 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^n$ によって，

$$V^\perp =< v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n >$$

で表される．

部分空間を定義する方法には 2 つある．一つは基底の線形結合を用いる線形従属性を用いた定義であり，もう一つは上記にある部分空間の直交補空間を用いる定義である．

【命題 3.1 の別証明】部分空間 α は，斉次連立方程式

$$Ax = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \hline y_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline y_m^T \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{pmatrix} x = 0$$

の解空間と一致する．このとき，定理 1.4 から $\mathrm{null}A = n - m$ となる．■

【**例示 3.1 直交補空間**】R^n 上の m 次元部分空間

$$V = \{x = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_my_m \mid a_1, \ldots a_m \in R\}$$

に対する $n - m$ 次元直交補空間は

$$V^\perp = \{x \in R^n \mid y_1^T x = y_2^T x = \ldots = y_m^T x = 0\}$$

である．

以降，特別な断りがない限り，線形部分空間を単に部分空間と呼ぶことにする．

【**定義 3.4** 】$n \times n$ 正方行列 A が定める線形変換 $f \ : \ x \in R^n \mapsto Ax \in R^n$ において，部分空間 $\mathrm{Ker}f = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$ を**核 (kernel)** といい，部分空間 $\mathrm{Im}f = \{Ax \mid x \in R^n\}$ を**像 (image)** という．(図 3.1 参照)

【**定理 3.1** 次元公式】線形変換 $f \ : \ x \in R^n \mapsto Ax \in R^n$ において，

$$\dim \mathrm{Ker}f = \mathrm{null}A, \quad \dim \mathrm{Im}f = \mathrm{rank}A.$$

【証明】核の次元はその定義から，$\mathrm{null}A$ となる．他方，A の列ベクトルを $\{u_i\}_{i=1}^n$ として，任意の $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ の像 fx を求めると，列ベクトル空間

$$fx = (u_1|u_2|\ldots|u_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_iu_i$$

となる．よって，$\dim \mathrm{Im}f = \dim < u_1, u_2, \ldots, u_n >= \mathrm{rank}A$．■

次元公式 $n = \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Ker}f$ の成立から，$R^n = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$ を期待したいが，この等式は常に成立するわけではない．

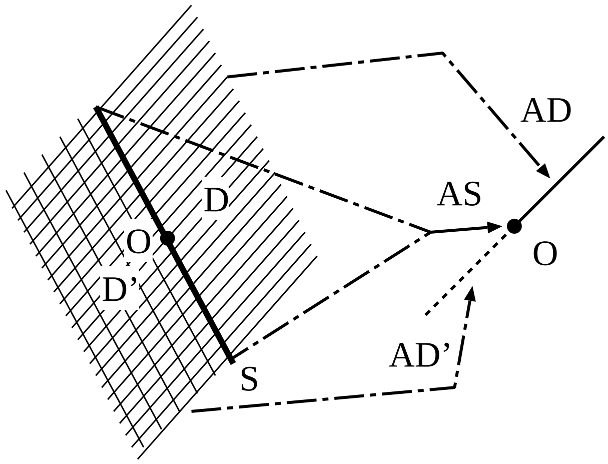

図 3.1: 2 次元線形変換 f の核と像 2 次元の領域 D の像 fD は，1 次元の線分に退化する．また，2 次元領域上のある線分 S は核として全て原点 O に写像される．

【例示 3.2 核と像が線形従属になる例**】** 2 重根の零固有値を持つ階数 1 の線形写像

$$f \ : \ x \in R^2 \mapsto J(0,2)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R^2$$

では，$\mathrm{rank}J(0,2) = \mathrm{null}J(0,2) = 1$ より，次元公式は成り立つが，その核と像は，

$$\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}f = (c, 0)^T$$

から同一の直線に縮退して，平面を張ることができない．

この次元公式と空間構造の矛盾を回避するために次の工夫が有効となる．

【定理 3.2 像の直交補空間としての核**】** 線形変換

$$f \ : \ x \in R^n \mapsto Ax \in R^n, \quad g \ : \ x \in R^n \mapsto A^T x \in R^n$$

において，

$$(\mathrm{Im}f)^\perp = \mathrm{Ker}g, \quad (\mathrm{Im}g)^\perp = \mathrm{Ker}f$$

となり，

$$R^n = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}g \oplus \mathrm{Ker}f.$$

【証明】$z \in \mathrm{Im}f = \{Ax \mid x \in R^n\}$ および $y \in \mathrm{Ker}g = \{y \in R^n \mid A^T y = 0\}$ とするとき，

$$y^T z = y^T Ax = (A^T y)^T x = 0$$

より，$z \perp y$．また，次元公式から，

$$\mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}g = \mathrm{rank}A + \mathrm{null}A^T = \mathrm{rank}A + \mathrm{null}A = n.$$

よって，rank$A$ 次元部分空間 Imf を張る基底は，null$A$ 次元部分空間 Ker$g$ を張る基底と直交し，

$$R^n = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f \oplus (\mathrm{Im}f)^{\perp}$$

が成立する．■

例示 3.2 において，$g\ :\ x \mapsto J(0,2)^T x$ とするとき，

$$\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}g = (0, c^{'})^T$$

となり，

$$R^n = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}f = \begin{pmatrix} 0 \\ c^{'} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2　固有空間と不変空間

【**定義 3.5** 】固有ベクトルもしくは一般化固有ベクトルによって張られる線形部分空間を**固有空間 (eigen space)** という．

【**定義 3.6** 】$n \times n$ 行列で定義される線形変換 $f\ :\ x \in R^n \mapsto Ax \in R^n$ において，

$$fX = \{Ax \mid x \in X\} \subseteq X$$

を満足する部分集合 $X \subset R^n$ は**不変 (invariant)** であるという．

【**命題 3.3** 固有空間の不変性 1】$n \times n$ 正方行列 A の非零固有値に対応する実固有ベクトル $x \in R^n$ の張る固有空間 $< x >$，複素固有ベクトル $u \pm iv$ の張る固有空間 $< u, v >$ はいずれも不変である．

【証明】$A < x >= \{tAx \mid t \in R^1\} = \{t\lambda x \mid t \in R^1\}$ から，媒介変数 t を $t' = t\lambda$ に置換して，

$$A < x >= \{t'x \mid t' \in R^1\} =< x > .$$

また，

$$A < u, v >= A\{tu + sv \mid t, s \in R^1\} = \{tAu + sAv \mid t, s \in R^1\}$$

に，複素固有ベクトルの定義 $Au = \sigma u - \omega v,\quad Av = \sigma v + \omega u$ を代入して，

$$\begin{aligned} \{tAu + sAv \mid t, s \in R^1\} &= \{t\sigma u - t\omega v + s\sigma v + s\omega u \mid t, s \in R^1\} \\ &= \{(t\sigma + s\omega)u + (-t\omega + s\sigma)v \mid t, s \in R^1\} \end{aligned}$$

から，$t' = t\sigma + s\omega$，$s' = -t\omega + s\sigma$ を代入して，$A < u, v >= \{t'u + s'v \mid t', s' \in R^1\} =< u, v >$．■

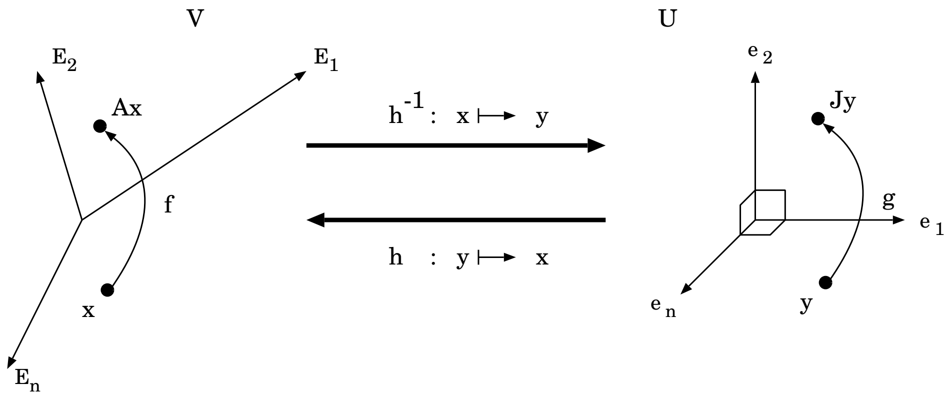

図 3.2: 対角化・ジョルダン分解の幾何学的解釈.

【**命題 3.4** 固有空間の不変性 *2*】$n \times n$ 正方行列 A がジョルダン細胞 $J(\lambda, m)$ を持つとき，一般化固有ベクトル $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^m$ の張る固有空間 $< u_1, u_2, \ldots, u_m >$ は不変である．

【証明】

$$\begin{aligned} A < u_1, u_2, \ldots, u_m > &= \{a_1 A u_1 + a_2 A u_2 + \ldots a_m A u_m \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in R\} \\ &= \{a_1 \lambda u_1 + a_2(\lambda u_2 + u_1) + \ldots + a_m(\lambda u_m + u_{m-1}) \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in R\} \\ &= \{(a_1\lambda + a_2)u_1 + (a_2\lambda + a_3)u_2 + \ldots + (a_m\lambda)u_m \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in R\} \end{aligned}$$

から，媒介変数 $\{a_i\}_{i=1}^m$ を $\{a'_i = a_i\lambda + a_{i+1}\}_{i=1}^{m-1}$, $a'_m = a_m\lambda$ に置換して，

$$A < u_1, u_2, \ldots, u_m >= \{a'_1 u_1 + a'_2 u_2 + \ldots a'_m u_m \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in R\} =< u_1, u_2, \ldots, u_m > . \blacksquare$$

線形性により，任意の固有ベクトルの線形結合による部分空間も不変である．この意味で，一つのジョルダン細胞に対応する固有空間は，最小の不変部分空間を与える．特に，ジョルダン細胞 $J(\sigma \pm i\omega, 2)$ に関しては 2 次元，ジョルダン細胞 $J(\lambda, m)$ に関しては m 次元となり，これ以下に分解することはできないことに注意する．

3.3 対角化・行列式・対角和の幾何学的解釈

相異なる実固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ によって，$AE_i = \lambda_i E_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を満足する $n \times n$ 実正方行列 A が，n 次元実空間 V において線形変換 $f \ : \ x \in V \mapsto Ax \in V$ を定めるとする．(図 3.2 参照）このとき，対角化とは，もう一つの n 次元実空間 U から V への正則な線形変換 $h \ : \ y \in U \mapsto Py \in V$ を定め，V 上の f の構造を U 上の g の構造に対応づける操作である．具体的に h は，空間 U 上の標準基 $\{e_i\}_{i=0}^n$ を重複なく V 上の固有ベクトルへ写像し，

$$h \ : \ e_i \in U \mapsto E_i = Pe_i \in V$$

を満たす．このとき，P は，$(E_1|E_2|\ldots|E_n) = P(e_1|e_2|\ldots|e_n) = P$ から固有ベクトルを列ベクトルとする行列である．総じて，$x \in V$ は，f, h を通じて，

$$x \overset{f}{\mapsto} Ax \in V \overset{h^{-1}}{\mapsto} P^{-1}Ax \in U,$$

同様に h, g を通じて，

$$x \overset{h^{-1}}{\mapsto} y = P^{-1}x \overset{g}{\mapsto} Jy = JP^{-1}x \in U$$

のように U 上へ写像される．変換 f, g, h のすべては，正則であるため，すべての $x \in V$ に対して，$JP^{-1}x$ は，$P^{-1}Ax$ に一致することになり，

$$Ax = PJy = PJP^{-1}x.$$

ここから，対角化の形式

$$A = PJP^{-1} = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$$

が導かれることになる．

一般に，行列 A の零固有値の重複度 $\mathrm{card}\{i \mid \lambda_i = 0\}$ が退化次数 $\mathrm{null}A$ と等しい場合，核 $\mathrm{Ker}f$ と零固有値に対応する固有空間は等しくなる．また，その補空間 [1] は，像 $\mathrm{Im}f$ であり，非零固有値に対応する固有空間によって張られる．よって，次元公式とともに $R^n = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ が成り立つ．しかし，例示 3.2 は，2 重根の零固有値に関して一般化固有ベクトルが発生し，核以外に 1 自由度分が補空間方向に組み込まれた構造となっている．

行列式とは，線形作用素 A による n 次元体積素の像の拡大係数を意味している．他方，固有値は，n 個の線形独立な固有ベクトル方向の線素拡大係数を意味するため，

$$\det A = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n$$

の関係が成することになる．仮に，一つでも零固有値が存在する場合は，像は n 次元体積を張れない，即ち，逆写像を持たない事になるため $\det A = 0$ となり A は非正則である．

では、対角和と固有値の関係

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

は，幾何学的に何を意味するのであろうか？これは，線形微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の基本解が，$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$ となる事を知る必要がある．(8.3 参照)　線形微分方程式系の n 次元ベクトル空間において n 次元体積素を時間 t まで流した場合，その拡大係数は

$$e^{\lambda_1 t} \times e^{\lambda_2 t} \times \ldots \times e^{\lambda_n t} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}$$

となる．他方，**リウビル (Liouville)** の公式より，任意の n 次元体積 v は，微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{tr}Av$$

を満足することから，拡大係数は $e^{\mathrm{tr}At}$ より．

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

を得る．即ち，対角和および固有値の総和とは線形作用素 A の与えるベクトル場の拡大指数となる**発散 (divergence)** を与える．

[1] 必ずしも直交補空間とならないことに注意する．

3.4 情報処理への展開

3.4.1 内積空間とフィルタリング

デジタル音響信号 80 年代から，レコードやテープというアナログ媒体に換えて，CD，DAT，DVD 等のデジタル媒体が普及している．アナログ信号とは，時間軸上で連続に変化する音圧そのものであるが，デジタル信号は，一定の時間間隔で音圧を抽出（**サンプリング** ; **sampling**）し，幾つかの値へこれを変換（**量子化** ; **quantization**）して構成される．例えば，音楽用 CD で用いられる PCM フォーマットは，1 秒間に 44,100 点をサンプリングする周波数 44.1[kHz]，1 サンプル当たり 16[bit] 精度のデジタル信号である．

フィルタリング 音響信号を電気的に伝送する場合，伝送路は伝えるべき信号のみを正確に伝えることはなく，周辺の電気あるいは磁気的影響を受けて，好ましくない**雑音**（**ノイズ** ; **noise**）を，これに印加して伝送してしまう．このため，**信号処理**（**Signal Processing**) の分野では，信号とノイズを分離するためのろ**過**（**フィルタリング** ; **filtering**）という処理が重要になる．

ノイズの印加されていないデジタル信号 $\{a_i \in R^1\}_{i=1}^D$ を**窓**（**window**）と呼ばれる一定の時間幅 n で分割し，n 次元信号ベクトル $\{x_i \in R^n\}_{i=1}^M$ を考える．その次元 n が十分大きい場合は，これらのベクトルの n 次元空間における分布は，さらに小さな次元 m $(< n)$ の部分空間 X に含まれると考えられる．換言するならば，どのような音響ベクトル x も，X を記述する正規直交基底系 $\{e_i\}_{i=1}^m$ の線形結合

$$x = (e_1^T x)e_1 + (e_2^T x)e_2 + \ldots (e_m^T x)e_m$$

で表されるという仮定である．他方，x に本来の信号と無関係なノイズ成分 ϵ が印加された場合，これを除去するフィルタは，ランク m の $n \times n$ 行列

$$F = e_1 e_1^T + e_2 e_2^T + \ldots + e_m e_m^T$$

で与えられる [2]．なぜなら，ϵ は，信号を包含する部分空間 V に属さず，その直交補空間 $V^\perp$ に属すため，すべての基底ベクトル $\{e_i\}_{i=1}^m$ と直交，すなわち，

$$F(x+\epsilon) = e_1 e_1^T(x+\epsilon) + e_2 e_2^T(x+\epsilon) + \ldots + e_m e_m^T(x+\epsilon) = x + F\epsilon = x$$

となるからである．無論，仮定 $\epsilon \in V^\perp$ は非常に理想的であり，一般に ϵ を V の各々の基底へ射影した成分

$$F\epsilon = (e_1^T \epsilon)e_1 + (e_2^T \epsilon)e_2 + \ldots + (e_m^T \epsilon)e_m$$

は，除去できずに雑音として残る．

上記の説明においては，信号ベクトルが存在する部分空間 V の直交基底系 $\{e_i\}_{i=1}^m$ を既知として議論を進めたが，具体的にこれらをデ− タ列から求める方法に関しては，6.4 を参照して欲しい．

3.4.2 内積空間と記憶機構

平面上の $n \times n$ 格子点を白と黒で塗分けた模様を 2 次元空間パターンという．また，白および黒に 0 および 1 の値を割り当て，値を一定の順番で並べることで空間パターンは，n^2 次元ベクトルで表現できる．**神経回路網** (**Newral Networks**) の分野では，このような空間パターンの集合を $\{x_i \in R^{n^2}\}_{i=1}^D$ とするとき，$D \ll n^2$ である $n^2 \times n^2$ 行列 A が，すべての $i \in \{1, 2, \ldots, D\}$ で

$$Ax_i = a_i x_i$$

[2] 問題 2.5 参照

を満たすとき，行列 A は空間パターンを記憶していると解釈する．ただし，$a_i > 0$ は定数である．また，雑音で汚された空間パターンに対して，

$$A(x_i + \epsilon) \approx a_i x_i$$

となるならば，行列 A によって空間パターンが想起されたと解釈する．
ここで，パターン集合 $\{x_i \in R^{n^2}\}_{i=1}^{D}$ の相異なる全てのパター ンが直交する場合，これらを記憶する行列 A は，

$$A = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T + \ldots + x_D x_D^T$$

で与えられることに注意する．なぜなら，

$$Ax_i = x_1(x_1^T x_i) + \ldots x_i(x_i^T x_i) + \ldots + x_D(x_D^T x_i) = (x_i^T x_i)x_i = a_i x_i$$

が成り立つためである．想起の基本原理は，上述のフィルタリングと同様であり，ノイズ ϵ が全ての空間パター ンと直交する場合に限り完全な想起

$$A(x_i + \epsilon) = a_i x_i \quad i \in \{1, 2, \ldots, D\}$$

が行われる．例えば，ノイズ ϵ が空間パター ン x_j の成分のみを若干でも持つ，すなわち，

$$x_j^T \epsilon = \xi$$

であるならば，

$$A(x_i + \epsilon) = a_i x_i + x_j(x_j^T \epsilon) = a_i x_i + \xi x_j$$

から，x_i と x_j を重ね合わせた（合成した）パター ンが誤って想起されることになる．

章末問題

【**問題 3.1** 線形部分空間 】命題 3.1 を示せ.（ヒント：グラム-シュミット直交化を用いよ.）

【**問題 3.2** 行ベクトル空間 】線形写像 $f\ :\ x \in R^n \mapsto Ax \in R^n$ の像は A の列ベクトル空間であるが，A の行ベクトル空間は線形写像 f のいかなる空間となるのか答えよ.

【**問題 3.3** 非正則行列 】$n \times n$ 正方行列 A と B が，$AB = 0$ を満足するとき，$0 \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leq n$ を示せ.

【**問題 3.4** ジョルダン分解 】行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に関して次の問に答えよ.

(1) A のランクとナリティーを求めよ.

(2) 一次変換 $f\ :\ x \in R^3 \mapsto Ax \in R^3$ の核および像を求めよ.

(3) A のジョルダン標準形を求めよ.

【**問題 3.5** 核と像による行列の表現 】ベクトル集合 $\{v_1, v_2, v_3\}$ が R^3 の基底であり，3×3 正方行列 A による線形写像の像と核は、それぞれ $< v_1, v_2 >$ と $< v_3 >$ であるとする．必要最小限の実係数を用いて $\{v_1, v_2, v_3\}$ によって A を表せ.

【**問題 3.6** 退化行列１ 】行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に関する次の設問に答えよ.

(1) 一次変換 $f\ :\ x \in R^2 \mapsto Ax \in R^2$ の像を求め，図示せよ.

(2) 一次変換 f の核を求め，図示せよ.

(3) A の固有ベクトルを求めよ.

(4) 固有ベクトルと像の関係について考察せよ.

【**問題 3.7** 退化行列 *2* 】行列

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の像と核を求めよ.

【**問題 3.8** 退化行列 *3* 】$m < n$ とするとき正規直交ベクトル $\{e_i \in R^n\}_{i=1}^{m}$ による $n \times n$ 行列

$$A = e_1 e_1^T + e_2 e_2^T + \ldots + e_m e_m^T$$

について，次の問に答えよ.

(1) 一次変換 $f\ :\ x \in R^n \to Ax \in R^n$ の Imf を示せ.

(2) Ker$f$ を示せ.

(3) この場合，Ker$f$ は，Imf の直交補空間となることを示せ.

【問題 3.9 神経回路網の連想記憶**】**相異なる元が直交する $D\ (\ll n^2)$ 個の空間パターン集合 $\{x_i \in R^{n^2}\}_{i=1}^{D}$ に対して，別な空間パターン集合 $\{y_i \in R^{n^2}\}_{i=1}^{D}$ が割り当てられているとき，

$$Ax_i = a_i y_i, \quad a_i > 0, \quad \text{for all } i \in \{1, 2, \ldots, D\}$$

を満足する行列 A は，パターン x_i からパターン y_i を連想できると解釈される．このような行列 A を定義し，上記の性質を示せ.