

## 第2章 対角化とジョルダン分解

### 2.1 固有値と対角化

**【定義 2.1】**  $n \times n$  実正方行列  $A$  において,  $Au = \lambda u$  を満足する非零の  $u \in R^n$  および  $\lambda \in R^1$  が存在するとき,  $u$  を**実固有ベクトル (real eigen vector)**,  $\lambda$  を**実固有値 (real eigen value)** という.

**【定義 2.2】**  $n \times n$  実正方行列  $A$  において,

$$A(u \pm iv) = (\sigma \pm i\omega)(u \pm iv)$$

を満足する非零の  $u, v \in R^n$  および  $\sigma, \omega \in R^1$  が存在するとき,  $u \pm iv$  を**複素固有ベクトル (complex eigen vector)**,  $\sigma \pm i\omega$  を**複素固有値 (complex eigen value)**<sup>1</sup> という.

**【定義 2.3】**  $n \times n$  正方行列  $A$  および  $m \times m$  正方行列  $B$  で構成される行列

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & B \end{pmatrix}$$

を行列  $A$  と  $B$  の**直和 (direct sum)** という.

**【定義 2.4】** 本講義では, 対角成分を  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  とする  $n \times n$  行列を,

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

で表記する.

**【定義 2.5】** 本講義では, 複素共役固有値  $\{\sigma \pm i\omega\}$  を持つ  $2 \times 2$  実正方行列を, 帯行列

$$\text{comp}(\sigma, \omega) = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix}$$

で表記する.

**【定義 2.6】** 任意の行列を幾つかの行列の積により一定の形式で表現する操作を**行列の分解 (decomposition of matrix)** という. 特に, 行列  $A$  が正則行列  $P$  によって,  $A = P^{-1}BP$  と分解される場合,  $A$  は  $B$  に**相似 (similar)** もしくは**線形共役 (linear conjugate)** であるという. 特に, 複素対角行列への分解を**対角化 (diagonalization)** といい, 実帯行列への分解を**標準化 (normalization)** という.

<sup>1</sup> 実正方行列の固有方程式は実係数の多項式となるため, 複素固有値は必ず共役となる.

**【命題 2.1 慣性法則】**  $n \times n$  正方行列  $A$  が固有値  $\lambda$  および固有ベクトル  $u$  を持つとき、 $n \times n$  正則行列  $P$  による行列  $PAP^{-1}$  は固有値  $\lambda$  を持つ。

**【命題 2.2  $m$  重固有値と固有ベクトルの線形独立性】**  $n \times n$  正方行列  $A$  の実固有値  $\lambda$  が  $m$  重根となるとき、 $\text{null}(\lambda I - A) = m$  ならば、線形独立な  $m$  個の固有ベクトルが定まる。

**【命題 2.3 固有ベクトルの線形独立性】**  $n \times n$  正方行列  $A$  が、相異なる実固有値  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  を持つとき、実固有ベクトル  $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^n$  は線形独立である。

**【命題 2.4 正方行列の対角化】**  $n \times n$  正方行列  $A$  が、線形独立な固有ベクトル  $\{u_i\}_{i=1}^n$  を持つとき、

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

によって、対角行列へ変形される。

**【命題 2.2 の証明】**  $\text{null}(\lambda I - A) = m$  である  $n$  次元斉次連立方程式  $(\lambda I - A)x = 0$  の一般解は、 $m$  個の線形独立なベクトルの線形結合となる。 ■

**【命題 2.3 の証明】**  $\{u_i\}_{i=1}^n$  の中から線形独立な固有ベクトルだけを取り出して、 $\{u_i\}_{i=1}^k$  とする。その他の固有ベクトル  $\{u_i\}_{i=k+1}^n$  は、線形従属であると仮定する。この時、適当な係数  $\{a_1, \dots, a_k\}$  によって、

$$u_{k+1} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$$

から、 $Au_{k+1} = \lambda_{k+1} u_{k+1}$  の両辺に代入して、

$$a_1 \lambda_{k+1} u_1 + \dots + a_k \lambda_{k+1} u_k = a_1 \lambda_1 u_1 + \dots + a_k \lambda_k u_k.$$

ここで、 $\{u_i\}_{i=1}^k$  の線形独立性から、任意の  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  に対して、 $\lambda_{k+1} = \lambda_i$  より、仮定に反する。 ■

**【命題 2.4 の証明】** 固有値と固有ベクトルに関する  $n$  個の等式

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

は、

$$A(u_1 | u_2 | \dots | u_n) = (u_1 | u_2 | \dots | u_n) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

で表現できる。ここで、仮定から行列  $P$  は正則であり、逆行列が存在する。 ■

**【命題 2.5 複素固有ベクトルの線形独立性】**  $(n+2k) \times (n+2k)$  正方行列  $A$  が、複素固有値  $\{\sigma_i \pm i\omega_i\}_{i=1}^k$  を持つとき、複素固有ベクトルの実部  $u_i \in R^n$  および虚部  $v_i \in R^n$  は線形独立である。また、これらは他の実固有値  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  の固有ベクトル  $\{x_i \in R^n\}_{i=1}^n$  と線形独立である。

**【命題 2.6 正方行列の標準化】**  $(n+2k) \times (n+2k)$  正方行列  $A$  が、相異なる実固有値  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  および相異なる複素共役固有値  $\{\sigma_i \pm i\omega_i\}_{i=1}^k$  を持つとき、

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \oplus_{i=1}^k \text{comp}(\sigma_i, \omega_i)$$

$$= \left( \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1 & -\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_1 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_k & -\omega_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_k & \sigma_k \end{array} \right)$$

によって、**帯行列 (band matrix)** に変形される。ただし、 $P = (x_1 | \dots | x_n | u_1 | v_1 | \dots | u_k | v_k)$  は、固有ベクトルを列とする行列である。

**【命題 2.6 の証明】**  $n$  個の等式

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

および  $2k$  個の等式

$$Au_i = \sigma_i u_i - \omega_i v_i, \quad Av_i = \sigma_i v_i + \omega_i u_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

は、

$$A(x_1 | \dots | x_n | u_1 | v_1 | \dots | u_k | v_k) = (x_1 | \dots | x_n | u_1 | v_1 | \dots | u_k | v_k) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \oplus_{i=1}^k J(\sigma_i, \omega_i, 2)$$

で表現できる。ここで、定理 2.5 から、行列  $P$  は正則であり、逆行列が存在する。■

## 2.2 ジョルダン分解

上記の  $n \times n$  正方行列の対角化に関する議論では、複素固有ベクトルを含めて、 $n$  個の線形独立な固有ベクトルの存在を仮定したが、仮に、固有値が  $m$  重根となり、 $\text{null}(\lambda I - A) \neq m$  となるとき、線形独立な  $m$  個の固有ベクトルを求めることはできない。このような特殊な場合を含め、一般化された分解法が**ジョルダン分解 (Jordan decomposition)** である。

**【定義 2.7】** 複素数の範囲で固有値が明示された行列

$$\text{実固有値} : J(\lambda, 1) = \text{diag}(\lambda)$$

$n$  重固有値 :

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$$

を  $\lambda$  に関するランク  $n$  のジョルダン細胞 (Jordan cell) という。また、ジョルダン細胞の直和で表される行列をジョルダン行列 (Jordan matrix) という。

**【定理 2.1 ジョルダン分解】** 任意の実正方行列は、(細胞の並び順を除いて) 唯一つのジョルダン行列  $J$  を用いて、 $P^{-1}AP = J$  に分解できる。

**【命題 2.7 ジョルダン細胞数】** 正方行列  $A$  が固有値  $\lambda$  を持つ場合、退化次数  $\text{null}(A - \lambda I)$  は、 $\lambda$  に関するジョルダン細胞数に等しい。

定理 2.1 の証明は、行列多項式の知識が必要となるため、本講義では証明なしにこれを用いる。

**【命題 2.7 証明】** ジョルダン行列  $J$  を  $\lambda$  に関する細胞とそうでない細胞の直和

$$J = J' \oplus J(\lambda, n_1) \oplus \dots \oplus J(\lambda, n_m)$$

に分解する。ここで、 $\{n_i\}_{i=1}^m$  は  $\lambda$  に関する  $i$  番目のジョルダン細胞のランクであり、 $m$  はジョルダン細胞数である。ジョルダン細胞  $J(\lambda, n)$  は、ランク  $n$  に依存せず退化次数は、 $\text{null}(J(\lambda, n) - \lambda I) = 1$  を満たすため、

$$\text{null}(J' \oplus J(\lambda, n_1) \oplus \dots \oplus J(\lambda, n_m) - \lambda I) = m.$$

他方、変換行列  $P$  に対して、

$$\text{null}(P(J - \lambda I)P^{-1}) = \text{null}(A - \lambda I)$$

から、ジョルダン細胞数  $m$  は  $\text{null}(A - \lambda I)$  に等しい。■

**【定理 2.2 一般化固有ベクトル】**  $n \times n$  正方行列  $A$  が、ジョルダン細胞  $J(\lambda, m)$  を持つとき、

$$(A - \lambda I)u_1 = 0, \quad u_i = (A - \lambda I)u_{i+1} \quad i \in \{1, \dots, m-1\}$$

を満足する  $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^m$  が存在する。ここで、固有ベクトル  $u_1$  に始まるベクトル集合  $\{u_i\}_{i=1}^m$  を一般化固有ベクトル (generalized eigen vector) という。

【証明】 ジョルダン行列を  $A = P(J(\lambda, n) \oplus J')P^{-1}$  とし,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$  とすると,

$$(J(\lambda, n) \oplus J' - \lambda I)e_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

また, 第  $i$  成分のみが非零の単位ベクトルを  $e_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^i, 1, 0, \dots, 0)^T$  とすると,

$$(J(\lambda, n) \oplus J' - \lambda I)e_i = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{i-1}.$$

ここで,  $u_i = Pe_i$  として,

$$\begin{aligned} 0 &= (J(\lambda, n) \oplus J' - \lambda I)P^{-1}u_1, \\ P^{-1}u_i &= (J(\lambda, n) \oplus J' - \lambda I)P^{-1}u_{i+1}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} 0 &= (PJ(\lambda, n) \oplus J'P^{-1} - \lambda I)u_1 = (A - \lambda I)u_1, \\ u_i &= (PJ(\lambda, n) \oplus J'P^{-1} - \lambda I)u_{i+1} = (A - \lambda I)u_{i+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

【例示 2.1 3重根の場合】  $3 \times 3$  行列  $A$  が 3 重根  $\alpha$  の場合を考えてみる.

- $\text{null}(A - \alpha I) = 3$  の場合: ジョルダン細胞数は 3. 固有ベクトルを  $u, v$  および  $w$  とすると,

$$Au = \alpha u, \quad Av = \alpha v, \quad Aw = \alpha w$$

より,

$$A(u|v|w) = (u|v|w) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = (u|v|w)(J(\alpha, 1) \oplus J(\alpha, 1) \oplus J(\alpha, 1)).$$

- $\text{null}(A - \alpha I) = 2$  の場合: ジョルダン細胞数は 2. 固有ベクトルを  $v$  とし, 一般化固有ベクトルを  $\{u_1, u_2\}$  とすると,

$$Av = \alpha v, \quad Au_1 = \alpha u_1, \quad Au_2 = \alpha u_2 + u_1$$

より,

$$Av = \alpha v, \quad A(u_1|u_2) = (u_1|u_2) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

したがって,

$$A(v|u_1|u_2) = (v|u_1|u_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = (v|u_1|u_2)(J(\alpha, 1) \oplus J(\alpha, 2)).$$

- $\text{null}(A - \alpha I) = 1$  の場合: ジョルダン細胞数は1. 一般化固有ベクトルを  $\{u_1, u_2, u_3\}$  とすると,

$$Au_1 = \alpha u_1, \quad Au_2 = \alpha u_2 + u_1, \quad Au_3 = \alpha u_3 + u_2$$

より,

$$A(u_1|u_2|u_3) = (u_1|u_2|u_3) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = (u_1|u_2|u_3)J(\alpha, 3).$$

総じて,  $n \times n$  行列  $A$  のジョルダン行列は,

- (1) 特性方程式を求めて, 固有値を調べる.
- (2)  $m$  重根  $\alpha$  がある場合は, ジョルダン細胞数  $\text{null}(A - \alpha I)$  を求める.
- (3)  $m$  およびジョルダン細胞数から個々の細胞を類推して, 固有ベクトルを定める.

なる手続きで決定される.

**【例示 2.2 4重根の場合】** 特性方程式が  $(x - 1)^4 = 0$  となる  $4 \times 4$  行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

のジョルダン行列を求めてみる.

第一に,  $\text{null}(A - I)$  を求めて, ジョルダン細胞数を調べる.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

から, 細胞数は2である.

第二に, ジョルダン行列を推定をする. 細胞数が2, かつランクが4となる場合は,  $J(1, 1) \oplus J(1, 3)$  あるいは  $J(1, 2) \oplus J(1, 2)$  のいずれかである.

第三に, 固有ベクトルを求める.  $(A - I)x = 0$  の一般解は,

$$x^* = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

また, 連立方程式  $(A - I)x = x^*$  は, 任意の  $x^*$  で常に解を持つため, ジョルダン行列は,  $J = J(1, 2) \oplus J(1, 2)$  となる.

## 章末問題

【問題 2.1 正則行列】  $n \times n$  正方行列  $A$  と  $B$  の積  $AB$  が正則であるとき,  $\text{rank}A$  と  $\text{rank}B$  を求めよ.

【問題 2.2 慣性法則】 命題 2.1 を示せ. また, 行列  $A$  の固有ベクトルが  $u$  であるとき,  $PAP^{-1}$  の固有ベクトルを求めよ.

【問題 2.3 複素固有ベクトルの線形独立性】  $n \times n$  正方行列  $A$  が, 複素固有値  $\sigma \pm i\omega$  を持つとき, 複素固有ベクトルの実部  $u \in R^n$  および虚部  $v \in R^n$  は線形独立であることを背理法で示せ.

【問題 2.4 ジョルダン分解】 次の行列をジョルダン分解せよ. また, 変換行列を与えよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【問題 2.5 退化行列】  $m < n$  とするとき正規直交ベクトル  $\{e_i \in R^n\}_{i=1}^m$  による  $n \times n$  行列

$$A = a_1 e_1 e_1^T + a_2 e_2 e_2^T + \dots + a_m e_m e_m^T, \quad a_i (\neq 0) \in R^1$$

について, 次の問に答えよ.

- (1)  $\{e_i \in R^n\}_{i=1}^m$  はすべて固有ベクトルとなることを示せ. また, 固有値を求めよ.
- (2)  $\{e_i \in R^n\}_{i=1}^m$  と線形独立な非零固有値の固有ベクトルは存在しないことを示せ.
- (3)  $A$  のランクとナリティを求めよ.

