

第1章 空間と行列の基礎

1.1 距離空間

【定義 1.1】 集合 \mathfrak{R} の任意の元 x に対して実数 $\|x\|$ が対応し、距離の公理

$$\text{〔非負性〕 } \|x\| \geq 0$$

$$\text{〔三角不等式〕 } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{R}^1)$$

が成立するとき、 $\|x\|$ をベクトル x のノルム (norm) といい、 \mathfrak{R} をノルム空間 (norm space) あるいは距離空間 (metric space) という。

【定義 1.2】 ノルム空間 \mathfrak{R} の元の列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が、

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| \rightarrow 0$$

を満たすとき、これをコーシー列 (Cauchy sequence) という。

【定義 1.3】 ノルム空間 \mathfrak{R} 上の任意のコーシー列が収束する、すなわち、 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して、

$$(1) p \in \mathfrak{R} \text{ が存在する}$$

$$(2) \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - p\| \rightarrow 0$$

が成立するとき、ノルム空間 \mathfrak{R} は完備 (complete) であるという。

【定義 1.4】 完備なノルム空間をバナッハ空間 (Banach space) という。

実空間¹ を例に完備性に関して重要な幾つかの定義を挙げておく。

【定義 1.5】 n 次元実空間 \mathbb{R}^n 上の部分集合 X に関してある定数 $M > 0$ が存在し、

$$\|x - y\| < M \text{ for all } x, y \in X$$

が成立する場合、 X は有界 (bounded) であるという。

¹ 関数空間等の抽象空間に関する議論は関数解析を参照して欲しい。

【定義 1.6】 n 次元実空間 R^n 上の有界集合 X 上の全てのコーシー列が収束するために、補集合 X^C に属す全ての極限点 (境界点) を X に合併した有界閉集合 \bar{X} を X の閉包 (closure) という。

【定義 1.7】 n 次元実空間 R^n 上の有界部分集合 X 上の部分集合 Y が、

$$X = \bar{Y}$$

となるとき、 Y は X 上で稠密 (dense) であるという。

【例示 1.1 有理数】 単位閉区間 $I = [0, 1]$ 上のすべての有理数を集めた集合 Q は、 I 上で稠密である。

1.2 実ベクトル空間

【定義 1.8】 集合 \mathfrak{R} の任意の 2 元 x および y に対して、

- 和 $x + y$ および差 $x - y$
- 定数倍 αx ($\alpha \in R^1$)

が定義されており、それらが全て \mathfrak{R} に属し、

[和の結合則] $(x + y) + z = x + (y + z)$

[和の交換則] $x + y = y + x$

[和の単位元] 全ての $x \in \mathfrak{R}$ に対して、 $x + 0 = x$

[和の逆元] 全ての $x \in \mathfrak{R}$ に対して、 $x + (-x) = 0$

[積の分配則] $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ および $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

[積の零因子] 全ての $x \in \mathfrak{R}$ に対して、 $0x = 0$

[積の単位元] 全ての $x \in \mathfrak{R}$ に対して、 $1x = x$

を満足する場合、 \mathfrak{R} を実ベクトル空間 (real vector space) と呼ぶ。

【定義 1.9】 集合 $\{x_i \in \mathfrak{R}\}_{i=1}^n$ に対して、集合 $\{a_i \in R^1\}_{i=1}^n$ が存在し、

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \text{ ならば } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

であるとき、 $\{x_i \in \mathfrak{R}\}_{i=1}^n$ を線形独立 (linearly independent) であるといい、そうでない場合を線形従属 (linearly dependent) であるという。

【定義 1.10】 実ベクトル空間 \mathfrak{R} の任意の 2 元 x および y に対して実数 $x \cdot y$ が対応し、

[分配則] $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$$[\text{交換則}] \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$[\text{非負性}] \quad x \cdot x \geq 0$$

$$x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(\alpha x) \cdot x = \alpha x \cdot x$$

が成立するとき、演算 \cdot を**内積 (inner product)** といい、 \mathfrak{R} を**内積空間 (inner product space)** という。

内積が定義された空間においては、自然な形で距離が定義される。特に、距離の公理における三角不等式はコーシー・シュワルツの不等式によって導かれる。

【定理 1.1 コーシー・シュワルツの不等式】 実ベクトル空間 \mathfrak{R} の任意の 2 元 x および y は、不等式

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y)$$

を満足する。

【証明】 $t \in R^1$ に関する 2 次式

$$0 \leq (x + ty) \cdot (x + ty) = (x \cdot x) + 2t(x \cdot y) + t^2(y \cdot y)$$

は、任意の t に対して非負であるため、判別式より、

$$(x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0$$

が成立する。■

以降、ベクトル (内積) 空間における元をベクトルと呼ぶこととする。

【定義 1.11】 内積空間 \mathfrak{R} において 2 つの非零ベクトル x および y の内積の大きさが最小 $x \cdot y = 0$ となるとき、2 ベクトルは**直交 (perpendicular)** しているという。幾何学的表現では、 $x \perp y$ を用いる。また、大きさが最大 $|x \cdot y| = \|x\| \|y\|$ となるとき、2 ベクトルは**平行 (parallel)** であるという。幾何学的表現では、 $x \parallel y$ を用いる。

【定義 1.12】 内積から定義されるノルムで完備となる内積空間を**ヒルベルト空間 (Hilbert space)** といい、完備ではない内積空間を**プレ・ヒルベルト空間 (pre Hilbert space)** という。

【定義 1.13】 ヒルベルト空間 \mathfrak{R} における全ての元 $x \in \mathfrak{R}$ が有限個の線形独立なベクトル $\{v_i \in \mathfrak{R}\}_{i=1}^n$ の線形結合 $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ により表現されるとき、 $\{v_i\}_{i=1}^n$ を**基底 (basis)** といい、 \mathfrak{R} を**ユークリッド空間 (Euclid space)** という。また、ベクトルの数 n を空間の**次元 (dimension)** といい、 $\dim \mathfrak{R}$ と表記する。

【定義 1.14】 ユークリッド空間 R^n における集合

$$X = \left\{ x = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in R^n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R^1 \right\}$$

をベクトル集合 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^m$ によって張られる部分空間 (subspace) といい, $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ で表記する. その次元 $\dim X$ はベクトル集合の線形独立なベクトルの最大数に等しい.

【定義 1.15】 ユークリッド空間におけるベクトル集合 $\{e_i\}_{i=1}^n$ が, $e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$ を満たすとき, 正規直交 (orthonormal)² であるという. 尚, $i = j$ ならば, $\delta_{i,j} = 1$, そうでないならば, $\delta_{i,j} = 0$ である関数 $\delta_{i,j}$ を, クロネッカデルタ (Kronecker delta) という.

【定義 1.16】 ユークリッド空間における基底が正規直交するとき, これを正規直交基底 (orthonormal basis) という. また, 基底 $\{g_i\}_{i=1}^n$ が正規直交でない場合,

$$g_i \cdot f_j = f_i \cdot g_j = \delta_{i,j}$$

を満足する非直交基底 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を双直交基底 (dual orthogonal basis) という.

【定義 1.17】 基底 $\{x_i \in R^n\}_{i=1}^n$ により任意の元 $x \in R^n$ を線形結合 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ で表現するとき, 各係数 $\{a_i\}_{i=1}^n$ を成分 (component) という.

特別な断りがない限り, 以降のすべての議論は, n 次元ユークリッド空間 (n 次元実空間 R^n) で完結することに注意を促す.

【命題 1.1 正規直交基底と内積】 $\{q_i \in R^n\}_{i=1}^n$ が, 正規直交基底であるとき, 2ベクトル $x = \sum_{i=1}^n a_i q_i$ および $y = \sum_{i=1}^n b_i q_i$ の内積は, 成分の積の和 $x \cdot y = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ となる.

【命題 1.2 正規直交基底の成分】 任意のベクトル x の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ に関する成分 $\{a_i\}_{i=1}^n$ は, $a_i = x \cdot e_i$ となる. 特に, 内積 $x \cdot e$ を基底ベクトル e への x の正射影 (projection) という.

【命題 1.3 非直交基底系の成分】 任意のベクトル x の非直交基底 $\{g_i\}_{i=1}^n$ に関する成分 $\{a_i\}_{i=1}^n$ は, 双直交基底 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を用いて $a_i = x \cdot f_i$ となる.

【命題 1.2 の証明】 $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ の両辺に e_k を内積すると, $e_k \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i e_k \cdot e_i = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{k,i} = a_k$. ■

【定義 1.18】 n 次元実空間におけるベクトル集合 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^n$ から,

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= v_1, & u_1 &= \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}, & \bar{u}_2 &= v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1, & u_2 &= \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|}, \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \bar{u}_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n \cdot u_i)u_i, & u_n &= \frac{\bar{u}_n}{\|\bar{u}_n\|} \end{aligned}$$

² 正規 (normal) とは, ベクトルの長さが 1 であることを意味する. また, 正規化 (normalization) とは, ベクトルの長さを 1 に整えることを意味する.

によって正規直交系を構成する操作をグラム-シュミット直交化 (Gram-Schmidt orthogonalization) という。

【定理 1.2 グラム-シュミット直交化】 ベクトル集合 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^n$ が線形独立ならば、グラム-シュミット直交化によるベクトル集合 $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^n$ は正規直交基底となる。

1.3 行列の基礎

【定義 1.19】 特別な指定のないとき、ベクトル $x \in R^n$ は列ベクトル (column vector) であるとし、行ベクトル (row vector) は列ベクトルの転置 (transpose) $x^T \in R^n$ で表記する。

【定義 1.20】 2ベクトル $x, y \in R^n$ の内積を、 $x^T y$ もしくは $y^T x$ で表記する。

【定義 1.21】 列ベクトル $\{x_i \in R^n\}_{i=1}^m$ を列とする $m \times n$ 行列を、 $(x_1 | x_2 | \dots | x_m)$ で表記する。また、部分空間 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ を行列の列ベクトル空間 (column vector space) という。他方、行ベクトル $\{y_i^T \in R^n\}_{i=1}^m$ を行とする $m \times n$ 行列を、

$\begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix}$ で表記し、部分空間 $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ を行列の行

ベクトル空間 (row vector space) という。

【定義 1.22】 $n \times n$ 正方行列 A に対して、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす行列 A^{-1} が存在するとき、これを A の逆行列 (inverse matrix) という。また、 A を正則行列 (regular matrix) という。

【定義 1.23】 $n \times n$ 正方行列 A の線形独立な列ベクトルあるいは行ベクトルの最大数 $\text{rank} A$ を行列の階数 (rank) といい、線形従属な列ベクトルあるいは行ベクトルの最大数 $\text{null} A = n - \text{rank} A$ を退化次数 (nullity) という。

【定義 1.24】 対角のみに非零成分を持つ正方行列を対角行列 (diagonal matrix) という。

【定義 1.25】 対角およびその右上にのみ非零成分を持つ正方行列を上三角行列 (upper triangular matrix) という。

【定義 1.26】 対角の右上にのみ非零成分を持つ正方行列を巾零行列 (nilpotent matrix) という。

ベクトル集合 $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^m$ が張る部分空間は、行列 $[v_1 | v_2 | \dots | v_m]$ の行ベクトル空間となり、 $\dim \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \text{rank}(v_1 | v_2 | \dots | v_m)$ を満たす。

【定理 1.3 正則行列】 $n \times n$ 実正方行列 A が正則という条件は次と同値である.

(1) A はフルランクである. 即ち, $\text{rank} A = n$.

(2) $\det A \neq 0$.

【定理 1.4 斉次連立方程式の解】 斉次連立方程式 $Ax = 0$ において,

(1) 非自明解を持つとき, A は非正則である. 即ち, $\det A = 0$.

(2) 解空間の次元は, $\dim\{x \mid Ax = 0\} = \text{null} A$.

係数 $\{a_i \in R\}_{i=1}^n$ と列ベクトル $\{v_i \in R^n\}_{i=1}^n$ による線形結合は, 行列を用いて

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = (v_1 | v_2 | \dots | v_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = Ax$$

で表現される. つまり, 斉次方程式 $Ax = 0$ は

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$$

より行列 A の列ベクトル集合に関する線形独立性の等式に他ならない. また, 列ベクトル $\{u_i \in R^n\}_{i=1}^n$ による行列 A および行ベクトル $\{v_i^T \in R^n\}_{i=1}^n$ による行列 B の積は,

$$AB = (u_1 | u_2 | \dots | u_n) \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i v_i^T$$

となり, 対応する列ベクトルと行ベクトルの積³に展開できる. この表現において, 右から何らかのベクトル $x \in R^n$ を乗じると

$$ABx = \sum_{i=1}^n u_i v_i^T x = \sum_{i=1}^n (v_i^T x) u_i$$

となり, 列ベクトル $\{u_i\}_{i=1}^n$ の線形結合を意味することに注意する. 他方, 積 BA は,

$$BA = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} (u_1 | u_2 | \dots | u_n) = \begin{pmatrix} v_1^T u_1 & v_1^T u_2 & \dots & v_1^T u_n \\ v_2^T u_1 & v_2^T u_2 & \dots & v_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^T u_1 & v_n^T u_2 & \dots & v_n^T u_n \end{pmatrix}$$

となり, i 行 j 列成分が行ベクトルと列ベクトルの内積 $v_i^T u_j$ に等しく, 直ちにすべての要素が表現される.

³ 内積とはならないことに注意せよ.

1.4 情報処理への展開

1.4.1 正規直交性とデジタル通信

アルファベット $\{a, b, \dots, z\}$ に空白とピリオドを加えた 28 種類の記号を 0 から 27 の整数と対応づける。これら 28 種類の記号のみで記述されたメッセージの一語づつを順に整数に読み変えることで数列

$$\{a_i\}_{i=0}^n, \quad a \in \{0, 1, \dots, 27\}$$

が得られる。ここで、一つの通信回線で 3 つの異なるメッセージ $\{a_i\}_{i=0}^n$, $\{b_i\}_{i=0}^n$, $\{c_i\}_{i=0}^n$ を異なる受信者 A, B, C に安全に送る方法を検討してみよう。

最も単純な方式は、一定の時間を交互に割り当て、

$$a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \dots$$

のように数値を送信する時分割方式である。このとき、分割の様式さえわかれば誰でもメッセージを解読できることに注意する。他方、ベクトルの直交性を利用することで、3 つのメッセージを重ねて同時に行うことができる。まず、3 次元の正規直交ベクトル $\{v_A, v_B, v_C\}$ を定めて⁴、受信者 A, B, C にそれぞれ割り当てる。次に、 i 番目の数値を用いて線形結合

$$u_i = (x_i, y_i, z_i) = a_i v_A + b_i v_B + c_i v_C$$

を求め、該当する成分を順に並べて

$$\overbrace{x_0, y_0, z_0}^{u_0}, \overbrace{x_1, y_1, z_1}^{u_1}, \dots$$

を送信する。受信者 A はメッセージを受け取るために v_A をベクトル u_i に内積すればよい。なぜなら、

$$v_A^T u_i = a_i \|v_A\|^2 + b_i v_A^T v_B + c_i v_A^T v_C = a_i$$

から、 $\{a_i\}_{i=0}^n$ を直ちに求めることができる。加えて、受信者 A は v_B を知らない限り、メッセージ $\{b_i\}_{i=0}^n$ を解読することはできない。この方式は、単純にメッセージを送信するだけでなく、メッセージを暗号化して送る**秘話通信 (secret communication)** としての特性を持っている。

1.4.2 ノルム空間と画像情報圧縮

デジタル画像と画像情報圧縮 (digital image and image data compression) 標準的な濃淡 (白黒) デジタル画像の明るさは、1[byte] の符号を使って $[0, 255]$ の 256 段階で表現されている。すなわち、発色する点 (これを**画素 (pixel)** という) の総数が D であるならば、画像は数列 $\{a_i\}_{i=1}^D$ を記入した、サイズは $D[\text{byte}]$ のファイルで表現される。このファイルを**符号化器 (encoder)** と呼ばれる処理系に入力することで、より小さな出力ファイルへ変換されるならば、この処理を**データ圧縮 (data compression)** という。(図 1.1 参照) また、出力ファイルを**復号器 (decoder)** と呼ばれる処理系に入力することで、もとの画像情報が完全に復元されるならば、これを**無歪み圧縮 (lossless compression)** といい、若干でも異なった画像が復元されるならば**歪み圧縮 (lossy compression)** という。一般に、歪み圧縮は無歪み圧縮に比べて、ファイルサイズをより小さくできることが知られている。

⁴ 実用上では、ベクトルの次元は非常に大きい。また、正規直交ベクトルを効率良く、安価に生成するために、M 系列等の疑似乱数が用いられる。

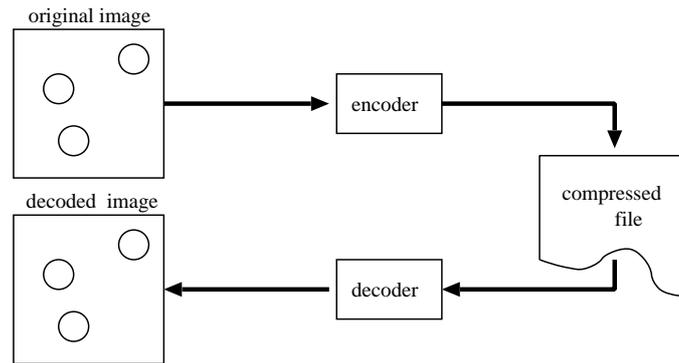


図 1.1: 画像情報圧縮におけるエンコーダとデコーダ

ベクトル量子化 (vector quantization) ノルム空間に基づく歪み圧縮⁵として、ベクトル量子化がある。まず、画像を $m \times m$ 画素からなる**ブロック (block)** に分割し、一つのブロックを m^2 次元ベクトル x と考える。このとき、画像全体はベクトル集合 $\{x_i \in R^{m^2}\}_{i=1}^D$ で記述されるため、 m^2 次元空間 X における D 個の点の分布が定まる。ここで、 X に対して 2 乗ノルム $\|x\|^2$ を導入して、2 点間の距離が計れるようにする。仮に、 X において非常に多くの点が集中する領域があるならば、この領域に属す全てのブロックの“見た目”は類似していることに注意する。そこで、あらかじめ X を交わることのない K ($< D$) 個の領域 (これを**クラスタ (clasta)** という) に分割し、各クラスタの典型的なブロック (これを**セントロイド (centoroid)** という) $\{c_j\}_{j=1}^K$ を記録した**コードブック (code book)** を用意する。エンコーダは、列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_D$$

を、各ブロック x_i に最も近いクラスタ番号 (これを**インデックス (index)** という) の列

$$J_1 (= \operatorname{argmin}_{j \in \{1, 2, \dots, K\}} \|x_1 - C_j\|^2), J_2, J_3, \dots, J_D$$

に変換して出力ファイルを生成する。例えば、 $(m, k) = (8, 256)$ の場合、64[byte] で記述される一つのブロック x_i は、1[byte] のインデックスで表されるため、画像情報そのものを蓄積・伝送するよりも大幅にコストが低減できる。逆に、デコーダは、インデックスの順にセントロイド

$$x_1 \approx C_{J_1}, x_2 \approx C_{J_2}, x_3 \approx C_{J_3}, \dots, x_D \approx C_{J_D}$$

を出力することで画像情報を復元する。ここで、復元画像は原画像と比較して、

$$E = \sum_{i=1}^D \|x_i - C_{J_i}\|^2$$

だけ歪むことに注意する。

クラスタリング (clustering) ノルム空間上で与えられた分布に基づいてクラスタを形成する一つの方法に、**k-平均法 (k-means method)** がある。まず、セントロイドの個数 K を定めて、 X 上に適当にばらまく。(図 1.2(a) 参照) 次に、第 j クラスタに属す、すべてのベクトル $\{x_{J_i} : J_i = j\}$ の重心ベクトルを求めて、セントロイド C_j を更新する。(図 1.2(b) 参照) この処理を全てのセントロイドに行うと誤差 E は単調に減少して行き、最終的にセントロイドの位置は収束する。(図 1.2(c) 参照) ここで、注意すべきことは、最終結果はセントロイドの初期配置に依存するため、誤差 E は極小ではあるが、必ずしも最小

⁵ 他方、内積空間に基づく歪み圧縮には、直交変換符号化がある。これに関しては、4.4.1 を参照して欲しい。

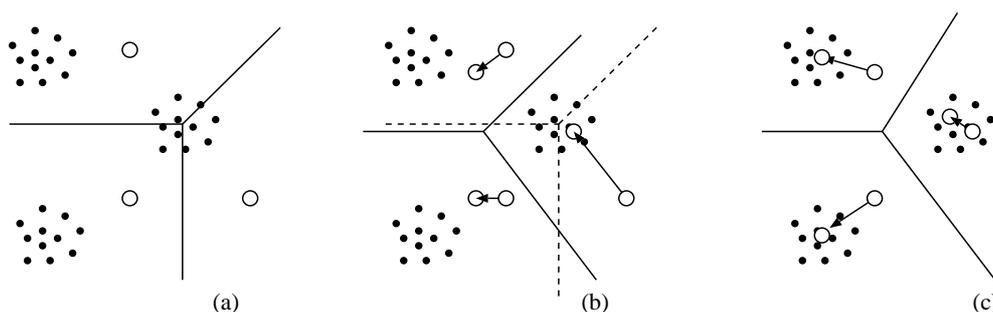


図 1.2: 2次元ノルム空間における k-平均法の適用例

とは限らないという事実である。

ベクトル量子化は、画像情報圧縮のみならず、音響信号情報圧縮にも利用される方式である。また、クラスタリングはパターン認識等にも利用されている。

減色 (color reduction) ゲームソフトで多用される画像データの形式であるインデックスカラー (index color) は、RGB 空間の中でクラスタリングを行い画像を表現する色数を減らす3次元ベクトル量子化の一種である減色 (color reduction) で生成される。k-平均法は、初期条件や反復計算に要する計算コスト等の問題があるため、必要な回数だけ再帰的に処理を行い適当な結果が得られるメディアンカット (median cut) が利用されている。まず、3次元空間に元をマッピングし、これに外接する直方体⁶を求める。次に直方体の最大の辺でこれを2分割し、データを2つのクラスに分ける。以降は、属す元の数の多いクラスで同様の処理を繰り返す。必要な色数まで分割し、最後に各クラスの元の平均値を代表色とする。

章末問題

【問題 1.1 閉包】 $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ の閉包を求めよ。

【問題 1.2 直交基底の成分】 命題 1.1 を示せ。

【問題 1.3 非直交基底の成分】 命題 1.3 を示せ。

【問題 1.4 グラム-シュミット直交化】 R^n 次元空間の非零ベクトル $\{x_1, x_2, \dots\}$ を逐次的に乱数で発生させ、グラム・シュミットの直交化を行うプログラムを作成したところ、 $m < n$ なる x_m の処理中にプログラムが異常終了したとする。考えられるエラーは何か、また、それが何故 x_m で起こったのか理由を述べよ。

【問題 1.5 斉次方程式の非自明解】 非零ベクトルを $a \in R^n$ とするとき、 $\dim\{x \in R^n \mid a^T x = 0\}$ を求めよ。

【問題 1.6 部分空間の次元と基底】 R^3 におけるベクトル集合を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき、次の設問に答えよ。

⁶ 各辺は、各軸と平行である。

(1) $\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ を求めよ.

(2) グラム・シュミット直交化により, $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ を張る正規直交基底を求めよ.

【問題 1.7 非直交基底】 線形独立な2つのベクトル $\{a, b \in R^2\}$ によって, 任意のベクトル $x \in R^2$ を $x = \alpha a + \beta b$ と表わす時, α と β を求めよ. また, 線形独立という仮定はどこで用いられたか述べよ.

【問題 1.8 非直交基底】 問題 1.7 を内積を利用して解いたものは, 行列表現を用いて別解を求めよ. 逆に, 行列表現を利用して解いたものは, 内積を用いて別解を求めよ.

【問題 1.9 行列のランクと退化次数】 非零列ベクトルを $a \in R^n$ とするとき, $\text{rank}(aa^T)$ および $\text{null}(aa^T)$ を求めよ. 必要であれば, $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ なる表記を用いてよい.

【問題 1.10 双直交基底】 線形独立なベクトルの集合 $\{x_i \in R^n\}_{i=1}^n$ が与えられたとき, これと双直交なベクトルの集合をいかに求めたらよいか. 具体的に計算手順を答えよ.

【問題 1.11 k -平均法の収束】 k -平均法において, 第 n 回目のセントロイドの更新を終えた時点での2乗誤差が E_n であるとき, 数列 E_n は広義単調減少となる. ここで, 数列 $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束する理由を解析学で学んだ知識を用いて説明せよ.