第 1 回レポート課題

【1】 非零列ベクトル $a\in R^n$ とするとき，$\dim\{x\in R^n : a^Tx=0\}$を求めよ．（※以降の問題ではベクトルは列ベクトル表現とする）

【2】 非零ベクトルを $a, b\in R^n$ とするとき，$\dim\{x\in R^n : a^Tx= b^Tx=0\}$を求めよ．

【3】 線形独立な 2 ベクトル$\{a, b\in R^2\}$を用いて，任意の $x\in R^2$ を $x=\alpha a+\beta b$ で表現する．

(a) 逆行列により α と β を求めよ．このとき，線形独立という仮定をどこで用いたのか答えよ．

(b) 内積を用いて連立方程式をたて α と β を求めよ．このとき，線形独立という仮定をどこで用いたのか述べよ．

【4】 色のデータ集合$\{x_i=(r_i,g_i,b_i) : i=1,\dots,D\}$をある正則な線形写像 f で変換したデータ$\{fx_i : i=1,\dots,D\}$にメディアンカットを適用してクラスタリングを行うと，より誤差の少ない分割結果が得られたとする．このとき，f が満たす 2 つの性質について考察せよ．

第 2 回レポート課題

【1】 $n\times n$ 正方行列 A と B が，$AB=0$ を満足するとき， $\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$ の値域を核と像の関係を用いて求めよ．尚、行列 X を作用素とする線形写像は f_X と表記せよ．

【2】 線形写像 $f: x\in R^n \mapsto \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x\in R^n$ について次の設問に答えよ．尚，$0<k<n$ とする．

(a) $\{u_i\in R^n : i=1,\dots,n\}$が正規直交基底であるとき，核の基底を求めよ．

(b) $\{u_i\in R^n : i=1,\dots,n\}$が非直交基底であるとき，核の基底を求めよ．

【3】 $\{u, v, w\in R^3\}$を非直交基底とする．3×3 正方行列 A を作用素とする線形写像 f_A の像が$\langle u,v\rangle$であり，核が$\langle w\rangle$であるとき，必要最小限の定数を用いて A を表現せよ．

【4】 α が非零の実数および $\{u_i\in R^n : i=1,\dots,n\}$ が正規直交基底であるとき，線形写像 $f : x \in R^n \mapsto (\alpha_1u_1u_1^T+\dots+\alpha_ku_ku_k^T)x \in R^n$ の核と像を求めよ．尚，$0<k<n$ とする．

第 3 回レポート課題

【1】 $n\times n$ 正方行列 A が固有値 α と固有ベクトル u を持つとき，任意の正則行列 P で相似となる行列 PAP^{-1} は固有値 α を持つことを示せ．また，その固有ベクトルを求めよ．

【2】 $n \times n$ 正方行列 A が複素共役固有値 $\sigma\pm i\omega$ と固有ベクトル $u\pm iv$ を持つとき，u と v は線形独立であることを背理法で示せ．（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）

【3】 $n\times n$ 正方行列 A が複素共役固有値 $\sigma\pm i\omega$ と実固有値 λ および対応する複素固有ベクトル $u\pm iv$ と実固有ベクトル w を持つとき，$w\notin\langle v,u\rangle$ を背理法で示せ．（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）

【4】 $n \times n$ 正方行列 $A= \alpha_1u_1v_1^T+\ldots+\alpha_nu_nv_n^T$ の固有値と固有ベクトルが $\{\alpha_i\in R^1: i=1,\ldots,n\}$ と $\{u_i\in R^n: i=1,\ldots,n\}$ であるとき，$\{v_i\in R^n : i=1,\ldots,n\}$ が満たすべき条件を求めよ．

第 4 回レポート課題

【1】 $\{u_i\in R^n : i=1,\ldots,n\}$ が正規直交基底であるとき，$n \times n$ 正方行列 $A= u_1u_1^T+\ldots+ u_nu_n^T$ を求めよ．

【2】 直交行列 Q が複素共役固有値 $\sigma\pm i\omega$ を持つとき，その大きさは $\sigma^2+\omega^2=1$ となることを示せ．（※計算過程には虚数単位を含まないように示せ）

【3】 任意の正方行列 A は直交行列 Q と上三角行列 R の積で表現できることを示せ．また，この知見より $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^T$ および $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}AA^T$ を示せ．

【4】 $\{u,v\in R^2\}$ を正規直交基底とするとき，2x2 行列 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}[u|u]$ と $B=\frac{1}{\sqrt{2}}[v|-v]$ は重複直交変換の性質 $AA^T+BB^T=I$，$BA^T=AB^T=0$ を満足することを示せ．

第 5 回レポート課題

【1】 実対称行列 A が，正定値であるならば $A=B^TB$ を満たす正則な正方行列が存在することを示せ．

【2】 実正方行列 A から作られる対称行列 $A+A^T$ が正定値となるとき、固有値の実部はすべて正となることを示せ．

【3】 拘束条件 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ の下での $|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n|$ の最大化問題をスペクトルノルムの知見を利用して解け．

【4】 $n\times n$ 正則行列 A による単位球面 $\{x\in R^n : x^Tx=1\}$ の像 $\{y=Ax\in R^n : x^Tx=1\}$ は楕円曲面となることを示せ．

第 6 回レポート課題

【1】 $n \times n$ 正定値(対称)行列 A が固有値$\{\lambda_i \in R^n: i=1,\ldots,n\}$と固有ベクトル$\{u_i \in R^n: i=1,\ldots,n\}$を持つとき，線形方程式 $b = Ax$ $(x, b \in R^n)$の解 x^*を固有ベクトルの線形結合で表せ.

【2】 $n \times n$ 正則行列 A が相異なる固有値$\{\lambda_i \in R^n: i=1,\ldots,n\}$と固有ベクトル$\{u_i \in R^n: i=1,\ldots,n\}$を持つとき，線形方程式 $b = Ax$ $(x, b \in R^n)$の解 x^*を固有ベクトルの線形結合で表せ.

【3】 線形方程式 $b=Ax$ $(x, b \in R^n)$の解 x^*を漸化式で求める方法を考えてみる.

(a) x に関する線形方程式 $x = Bx+b$ の解が x^*となるように線形作用素 B を定めよ.

(b) $||B||<1$ ならば漸化式 $x_{n+1} = Bx_n+b$ の極限は x^*に収束することを示せ.

【4】 n 次元データベクトル$\{x_i \in R^n : i=1,\ldots,D\}$を包含する部分空間 X の次元 r を求めよ．また，X を張る正規直交基底$\{e_j \in R^n : j=1,\ldots,r\}$を求めよ.

第 8 回レポート課題

【1】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の線形作用素 A が実固有値 α と固有ベクトル u を持つとき, 直線$\{su : s \in R^1\}$上に初期条件 x_0 をもつ軌道 $x(x_0,t)$は常に$\{su : s \in R^1\}$上に存在することを示せ.

【2】 線形差分方程式 $x_{n+1} = Ax_n$ の線形作用素 A が実固有値 α と固有ベクトル u を持つとき, 直線$\{su : s \in R^1\}$上に初期条件 x_0 をもつ軌道 $x(x_0,n)$は常に$\{su : s \in R^1\}$上に存在することを示せ.

【3】 線形微分方程式 $dx/dt = Ax$ の平衡点 0 は，$A+A^T<0$ ならば漸近安定となることを示せ.

【4】 線形微分方程式 $x_{n+1} = Ax_n$ の不動点 0 は，$||A||<1$ が漸近安定となることを示せ．また，この条件は漸近安定性の十分条件である理由を述べよ.

第 9 回レポート課題

【1】 4 次元空間上の 3 次元超曲面 $w=\exp(x^2+y^2+z^2)$の点$(x,y,z)=(a,b,c)$における接平面を求めよ.

【2】 ポテンシャル $\psi \in C^2 : x \in R^n \to \psi(x) \in R^1$ の勾配場 $F : x \in R^n \mapsto -\mathrm{grad}\psi(x) \in R^n$ の任意の点 p において固有値は実固有値となることを示せ.

【3】 ポテンシャル $\psi \in C^2 : x \in R^n \to \psi(x) \in R^1$ に関する最急降下法 $dx/dt = -\mathrm{grad}\psi(x)$の軌道を $x(t)$とするとき，$d\psi(x(t))/dt<0$ を示せ.

【4】 $m \times n$ 非正方行列 A および $b \in R^m$ によるポテンシャル $\psi : x \in R^n \to \psi(x)=||Ax-b||^2 \in R^1$ の勾配ベクトル場 $F : x \in R^n \mapsto -\mathrm{grad}\psi(x) \in R^n$ の平衡点 x^*が満足する方程式を導け．また，その解 x^*を求めよ.