

1 実ベクトル空間と部分空間

問題 1.1 次の行列について設問に答えよ.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 各行列の行列式, トレース (対角和), ランク (階数), ナリティー (退化次数) を求めよ.
- (2) 各行列を A とするとき, 斉次連立方程式 $Ax = 0$ に非自明解 ($x \neq 0$ なる解) が存在するか否かを判定せよ. また, 非自明解が存在する場合, その解を求めよ.

問題 1.2 次の行列について設問に答えよ.

$$(a) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 各行列の行列式, トレース (対角和), ランク (階数), ナリティー (退化次数) を求めよ.
- (2) 各行列を A とするとき, 斉次連立方程式 $Ax = 0$ に非自明解が存在するか否かを判定せよ. また, 非自明解が存在する場合, その解を求めよ.

問題 1.3 R^3 の 3 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) 部分空間 $\langle v_1, v_2 \rangle$ を表現せよ.
- (2) 部分空間 $\langle v_3 \rangle$ を表現せよ.
- (3) 部分空間 $\langle v_1, v_2 \rangle$ と $\langle v_3 \rangle$ の関係を述べよ.
- (4) 部分空間 $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ は R^3 を張るか答えよ.

問題 1.4 R^4 の 4 ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) 部分空間 $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ を表現せよ.
- (2) 部分空間 $\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ を表現せよ.
- (3) 部分空間 $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ と $\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ の関係を述べよ.
- (4) 部分空間 $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ は R^4 を張るか答えよ.