6　ベクトル空間と内積

復習と確認 6.1 $\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\}$ の意味は，$\boxed{}$ である．

復習と確認 6.2 $\dim\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\} = \boxed{}$.

復習と確認 6.3 $\boxed{(a)}$ な $\boxed{(b)}$ が，$\boxed{(c)}$ だけ存在するならば，$n\times n$ 行列 A は，対角化可能である．すなわち，すべての $\boxed{(b)}$ の集合が，R^n の $\boxed{(d)}$ となるなら，対角化可能である．

復習と確認 6.4 $n \times n$ 行列 A が対角化可能となる条件を具体的に述べよ．

復習と確認 6.5 $n \times n$ 行列 A が対角化可能である場合，線形写像 $f : \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{Ax} \in \mathrm{R}^n$ の核は，$\boxed{(a)}$ の固有ベクトルで張られ，像は $\boxed{(b)}$ の固有ベクトルで張られる．よって，$\boxed{(c)} = \mathrm{R}^n$.

復習と確認 6.6 $n\times n$ 行列 A および B に関して，$\det \mathrm{AB} = \boxed{(a)}$ であり，B が正則ならば，$\det \mathrm{AB}^{-1} = \boxed{(b)}$ である．ゆえに，A が対角化可能な場合，その固有値を $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ とすると，$\det \mathrm{A} = \boxed{(c)}$ である．

定義 6.1 実ベクトル空間 V の任意の二元 x, y に対して実数 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ が対応し，

- 分配則 $(\mathrm{x} + \mathrm{y}) \cdot \mathrm{z} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{z} + \mathrm{y} \cdot \mathrm{z}$
- 交換則 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{y} \cdot \mathrm{x}$
- 非負性 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} \geq 0$
- $\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$
- $(\alpha \mathrm{x}) \cdot \mathrm{x} = \alpha \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}$

が成立するとき，演算 $\cdot$ を内積といい，V を内積空間という．

定義 6.2 $\| \mathrm{x} \| = \sqrt{\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}}$ をノルム（長さ）という．

定義 6.3 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$ を満たす 2 ベクトルは，直交するといい，$\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ で表す．

定理 6.1 シュワルツの不等式 $|\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}| \leq \| \mathrm{x} \| \| \mathrm{y} \|$ が成立する．

証明　非負性から任意の $\lambda \in \mathrm{R}^1$ に対して,

$$0 \leq (\mathrm{x}+\lambda \mathrm{y}) \cdot (\mathrm{x}+\lambda \mathrm{y}) = \| \mathrm{x} \|^2 + 2\lambda \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \lambda^2 \| \mathrm{y} \|^2$$

より，λ に関する 2 次多項式の判別式は常に零か負である.

■

定理 6.2 $\| \mathrm{x} \|$ は，距離の公理

(1) 非負性 $\| \mathrm{x} \| \geq 0$

(2) 実定数倍 $\| \alpha \mathrm{x} \| = |\alpha| \, \| \mathrm{x} \| \quad (\alpha \in \mathrm{R}^1)$

(3) $\| \mathrm{x} - \mathrm{y} \| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$.

(4) 交換則 $\| \mathrm{x} - \mathrm{y} \| = \| \mathrm{y} - \mathrm{x} \|$.

(5) 三角方程式 $\| \mathrm{x} - \mathrm{y} \| \leq \| \mathrm{x} - \mathrm{z} \| + \| \mathrm{y} - \mathrm{z} \|$.

を満足する.

証明　定義 6.1 から (1) から (4) は自明であるため，(5) のみを証明する.

$$\| \mathrm{x}+\mathrm{y} \|^2 = (\mathrm{x}+\mathrm{y}) \cdot (\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \| \mathrm{x} \|^2 + 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \| \mathrm{y} \|^2$$

にシュワルツの不等式を用いて,

$$\| \mathrm{x}+\mathrm{y} \|^2 \leq \| \mathrm{x} \|^2 + 2 \| \mathrm{x} \| \| \mathrm{y} \| + \| \mathrm{y} \|^2 = (\| \mathrm{x} \| + \| \mathrm{y} \|)^2.$$

■

定義 6.4 $i = j$ ならば 1，$i \neq j$ ならば 0 となる関数 $\delta_{i,j}$ をクロネッカデルタという.

定義 6.5 実ベクトル空間 V のベクトル $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ が,

$$\mathrm{v}_i \cdot \mathrm{v}_j = 0 \text{ for all i} \neq \text{j}$$

を満たすとき，これを直交系という．さらに,

$$\mathrm{v}_i \cdot \mathrm{v}_j = \delta_{i,j}$$

ならば，これを正規直交系という.

定理 6.3 $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^n$ が正規直交基底であるとする．このとき，任意のベクトル $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{v}_i$ および $y = \sum_{i=1}^n b_i \mathrm{v}_i$ に関して,

(1) $a_i = \mathrm{x} \cdot \mathrm{v}_i$

(2) $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

(3) $\| \mathrm{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

が成立する．

証明

(1) $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{v}_i$ の辺々に v_i を内積して，$\mathrm{x} \cdot \mathrm{v}_i = a_i \| \mathrm{v}_i \|^2 = a_i$.

(2) $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{v}_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \| \mathrm{v}_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

(3) (2) において，$\mathrm{x} = \mathrm{y}$ とすればよい．

■

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ より，x と y が列ベクトルである場合は，$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x}^T \mathrm{y}$ となることに注意する．

定理 6.4 $\{\mathrm{u}_i \in V\}_{i=1}^{n}$ が基底であるとき，グラム・シュミット直交化

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_1 &= \mathrm{u}_1, \quad \mathrm{v}_1 = \frac{\mathrm{w}_1}{\| \mathrm{w}_1 \|} \\
\mathrm{w}_2 &= \mathrm{u}_2 - (\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{u}_2)\mathrm{v}_1, \quad \mathrm{v}_2 = \frac{\mathrm{w}_2}{\| \mathrm{w}_2 \|} \\
\mathrm{w}_3 &= \mathrm{u}_3 - (\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{u}_3)\mathrm{v}_1 - (\mathrm{v}_2 \cdot \mathrm{u}_3)\mathrm{v}_2, \quad \mathrm{v}_2 = \frac{\mathrm{w}_2}{\| \mathrm{w}_2 \|} \\
&\vdots \\
\mathrm{w}_n &= \mathrm{u}_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\mathrm{v}_i \cdot \mathrm{u}_n)\mathrm{v}_i, \quad \mathrm{v}_n = \frac{\mathrm{w}_n}{\| \mathrm{w}_n \|}
\end{aligned}
$$

によって得られる基底 $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ は，正規直交である．

証明　ベクトル $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ は正規化されているため，直交性のみを示す．まず，

$$\mathrm{w}_2 \cdot \mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{u}_2 \| \mathrm{v}_1 \|^2 = 0$$

から，$\mathrm{v}_1 \perp \mathrm{v}_2$ である．次に，$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{k-1} \perp \mathrm{v}_k = 0$ を仮定すると，すべての $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，

$$\mathrm{w}_{k+1} = \sum_{i \neq j} a_i \mathrm{v}_i + \mathrm{u}_{k+1} - (\mathrm{v}_j \cdot \mathrm{u}_{k+1})\mathrm{v}_j$$

から，

$$\mathrm{w}_{k+1} \cdot \mathrm{v}_j = \mathrm{u}_{k+1} \cdot \mathrm{v}_j - (\mathrm{v}_j \cdot \mathrm{u}_{k+1}) \| \mathrm{v}_j \|^2 = 0.$$

よって，$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k \perp \mathrm{v}_{k+1} = 0$.

■

例 6.1 3 次元実空間上のベクトル

$$\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にグラム・シュミット直交化を施してみる．

(1) u_1 を正規化して，v_1 を計算する．

$$\mathrm{v}_1 = \frac{\mathrm{u}_1}{\| \mathrm{u}_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) u_2 の v_1 方向成分を減じて，w_2 を求める．また，これを正規化する．

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_2 &= \mathrm{u}_2 - (\mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{v}_1)\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \\ \mathrm{v}_2 &= \frac{\mathrm{w}_2}{\| \mathrm{w}_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) u_3 の v_1 および v_2 方向成分を減じて，w_2 を求める．また，これを正規化する．

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_3 &= \mathrm{u}_3 - (\mathrm{u}_3 \cdot \mathrm{v}_1)\mathrm{v}_1 - (\mathrm{u}_3 \cdot \mathrm{v}_2)\mathrm{v}_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ \mathrm{v}_3 &= \frac{\mathrm{w}_3}{\| \mathrm{w}_3 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^3$ が直交しているか検算を行う．

予備知識 6.1 $\mathrm{v}, \mathrm{u} \in R^3$ を 2 辺とする平行四辺形の面積をその大きさとして，v から u への右ネジの方向を持つ平面 $< \mathrm{v}, \mathrm{u} >$ の法線ベクトルを外積といい，$\mathrm{v} \times \mathrm{u}$ で表す．$\mathrm{v} = (a_1, a_2, a_3)$ および $\mathrm{v} = (b_1, b_2, b_3)$ とし，標準基を $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ とするとき，

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

となる．
