1　実ベクトル空間と部分空間

復習と確認 1.1 $n \times n$ 正方行列 A に関して，対角和 trA，階数 rank A および行列式 det A が計算できる．

復習と確認 1.2 3×3 正方行列 A に関して，逆行列 A^{-1} が計算できる．

復習と確認 1.3 $n \times n$ 正方行列 A に関して，null A $= n -$ rank A を退化次数（ナリティ）という．

復習と確認 1.4 $n \times n$ 正方行列 A において，斉次方程式の解集合 $\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathrm{Ax} = 0\}$ は，

(1) A が正則であるとき，自明解 $\mathrm{x} = 0$ のみ．

(2) A は非正則であるとき，非自明解を持つ．

が成り立つ．

定義 1.1 集合 V の元 $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$ に関する重み $\{a_i \in \mathrm{R}^1\}_{i=1}^n$ つきの和

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{v}_i = a_1 \mathrm{v}_1 + a_2 \mathrm{v}_2 + \ldots + a_n \mathrm{v}_n$$

を線形（一次）結合あるいは線形和という．

定義 1.2 集合 V の元 x, y に関して

- 和 $\mathrm{x} + \mathrm{y}$
- 実定数倍 $a\mathrm{x}$ $(a \in \mathrm{R}^1)$

が定義され，これらが V に属し，

- 和の単位元の存在 $\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x}$
- 和の逆元の存在 $\mathrm{x} + (-\mathrm{x}) = 0$
- 和の結合則 $(\mathrm{x} + \mathrm{y}) + \mathrm{z} = \mathrm{x} + (\mathrm{y} + \mathrm{z})$
- 和の交換則 $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}$
- 積の零因子の存在 $0\mathrm{x} = 0$
- 積の単位元の存在 $1\mathrm{x} = \mathrm{x}$
- 積の分配則 $a(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = a\mathrm{x} + a\mathrm{y}, \quad (a + b)\mathrm{x} = a\mathrm{x} + b\mathrm{x}$

を満足するとき，V を実ベクトル空間という．

命題 1.1 実ベクトル空間 V の任意の線形結合 $\sum_{i=1}^k a_i \mathrm{v}_i$ は，V の元である．

証明　$\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^k$ から，$x = a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 \in V$ かつ $\mathrm{y} = a_3 v_3 \in V$．したがって，

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 + a_3\mathrm{v}_3 \in V.$$

あらたに，　$\mathrm{x} = a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 + a_3\mathrm{v}_3 \in V$ および $\mathrm{y} = a_4\mathrm{v}_4 \in V$ として，

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = a_1\mathrm{v}_1 + a_2\mathrm{v}_2 + a_3\mathrm{v}_3 + a_4\mathrm{v}_4 \in V.$$

これを繰り返して，$\sum_{i=1}^k a_i\mathrm{v}_i \in V$．

■

定義 1.3 実ベクトル空間 V の部分集合 W の任意の元 x, y の線形結合 $a\mathrm{x} + b\mathrm{y}$ $(a, b \in \mathrm{R}^1)$ が W に属すとき，W を V の（線形）部分空間という．

命題 1.2 実ベクトル空間 V 上のベクトル $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^k$ の線形結合によって表される集合を $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ と表記するとき，　$< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ は，V の部分空間である．

証明

$$W =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >= \{\sum_{i=1}^k a_i\mathrm{v}_i \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathrm{R}^1\}$$

より，任意の 2 ベクトルを

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^k a_i\mathrm{v}_i, \quad \mathrm{y} = \sum_{i=1}^k b_i\mathrm{v}_i \in W$$

とするとき，

$$\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y} = \sum_{i=1}^k (\alpha a_i + \beta b_i)\mathrm{v}_i \in W.$$

■

定義 1.4 $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ を，ベクトル $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^k$ によって張られる部分空間という．また，$V =< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k >$ であるとき，V はベクトル $\{\mathrm{v}_i \in V\}_{i=1}^k$ によって張られる実ベクトル空間であるという．

例 1.1 R^2 上のベクトル

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 部分空間 $< \mathrm{v}_1 >= \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathrm{R}^1\}$ は原点を通過する直線である．

(2) 部分空間 $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 >= \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathrm{R}^1\}$ は平面であり，R^2 を張る．

(3) $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 >$ は，$s = 0$ とすると $< \mathrm{v}_1 >$ に一致する．よって，$< \mathrm{v}_1 >$ は，$< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 >$ の部分空間である．

(4) 部分空間 $<\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3>$ は，以下のように整理できる．

$$\begin{aligned} <\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3> &= \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s, u \in \mathrm{R}^1\} \\ &= \{\begin{pmatrix} t+u \\ u+s \end{pmatrix} \mid t, s, u \in \mathrm{R}^1\} \end{aligned}$$

ここで，係数を置き換えると，

$$<\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3> = \{\begin{pmatrix} t' \\ s' \end{pmatrix} \mid t', s' \in \mathrm{R}^1\} = <\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2> .$$

よって，2 つの部分空間は R^2 に一致する．

今回のポイント 1.1 “ベクトル集合 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ が線形空間 V を張る” とは，$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ に沿って，原点から任意の点 $\mathrm{x} \in V$ まで到達できるルートが**存在**するという意味である．但し，この状況では，ルートは**唯一**ではないことに注意する．
